Chłopiec czy dziewczynka?

*Łukasz RAJKOWSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

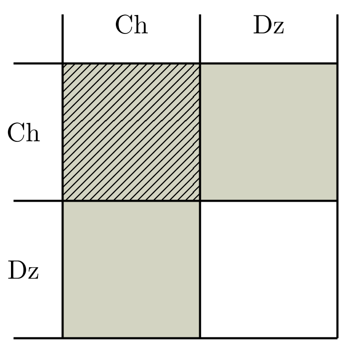
Wyobraź sobie, Drogi Czytelniku, że wybierasz się w daleką podróż pociągiem. Kiedy już wygodnie rozsiadłeś się na swoim miejscu i zacząłeś czytać ulubione czasopismo, lektura została przerwana przez rubaszny okrzyk: „Hej, kogo ja widzę! Kopę lat, co?”. Podnosisz głowę i Twoim oczom ukazuje się przyjacielska twarz, w której przy odrobinie wysiłku pamięciowego rozpoznajesz swojego dawno niewidzianego znajomego z podstawówki.
„Taaak, kopę lat…” – odpowiadasz, niechętnie zamykając świeżutki numer *Delty*.
„Co u Ciebie słychać?” – kurtuazyjnie dopytuje znajomy.
Cóż, następuje moment, w którym należy w jednym zdaniu streścić kilkanaście lat życia, w związku z czym odpowiadasz: „Dobrze! A co u Ciebie?”. Znajomy otwiera usta i już wiesz, że pytanie było błędem – on **faktycznie** chce Ci streścić ostatnich kilkanaście lat swojego życia, zdecydowanie nie w jednym zdaniu. Po jakiejś godzinie opowiadania o szkolno-zawodowych perypetiach w końcu przeszło na sprawy rodzinne. W pewnym momencie ograniczasz się do uprzejmego kiwania głową, uśmiechania się i niezawodnego „No tak…”, a tak naprawdę w swojej głowie rozwiązujesz deltowe Zadania z Myszką *[w tym numerze na stronie 19 – przyp. red.]*. W którymś momencie orientujesz się, że znajomy zaczął opowiadać o trudnościach w znalezieniu opieki dla swojego dziecka. Problem w tym, że umknął Ci moment, w którym wspominał, że je w ogóle ma.

Hm – myślisz sobie – *nie usłyszałem, czy to chłopiec, czy dziewczynka. Lepiej w takim razie w przyszłości wypowiadać się o nim/niej bezpłciowo; inaczej mam około* 50% *szans na niezręczną pomyłkę.*

Podobnym trudnościom poświęcony jest utwór Łony i Webbera *Nie mam pojęcia*.

W dalszej rozmowie okazuje się, że znajomy poszukiwał opieki nie dla jednego dziecka, a dla dwójki! Ponadto wychwyciłeś w monologu zdanie „Poszedłem z synkiem na spacer”, co ustala płeć jednego z tych dzieci. Płeć drugiego pozostaje dla Ciebie tajemnicą.

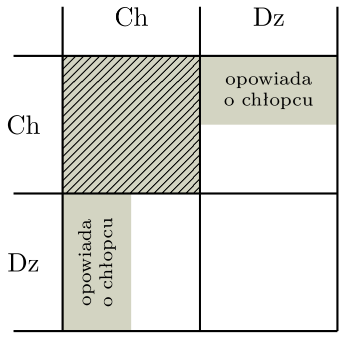
Ha, czytałem kiedyś coś o tym w Internecie! – pomyślałeś – *W pierwszej chwili wydawałoby się, że szansa na to, że drugie dziecko to też chłopiec, jest równa* 50%. *Ale można na problem spojrzeć inaczej. Jeśli zapomnę o informacjach, które już posiadam, to szansa na to, że starsze dziecko mojego znajomego jest chłopcem, to* 50%*; podobnie szansa na to, że młodsze jest chłopcem, to* 50%*, a zatem szansa na dwóch chłopców to* $50\% \cdot 50\% = 25\%$. *Szansa na dwie dziewczynki to również* 25%. *Pozostały jeszcze dwie możliwości, każda z prawdopodobieństwem* 25%*: starsze to chłopiec, młodsze to dziewczynka i odwrotnie. Wiem już, że znajomy ma synka, a więc z tych czterech równoprawdopodobnych sytuacji mogę ograniczyć się do trzech (wykluczam dwie córeczki). A z tych trzech tylko jedna odpowiada sytuacji, że mój znajomy ma dwóch synków, a więc szansa na to jest równa* $1/3$. *Przyparty do muru powinienem zatem obstawić córeczkę!*



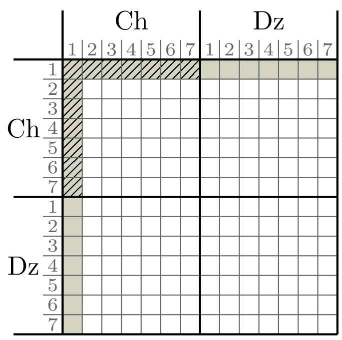
Rys. 1. Wiersze odpowiadają płci starszego dziecka, a kolumny – młodszego. Zakreskowany obszar stanowi $1/3$ obszaru zamalowanego

Aby upewnić się o słuszności swojego rozumowania, dyskretnie wyciągnąłeś kawałek papieru oraz ołówek i naszkicowałeś przekonującą tabelkę 2×2, której pola odpowiadały różnym kombinacjom płci starszego i młodszego dziecka (reprodukujemy ją na rys. 1). Tak jak wcześniej pomyślałeś, wszystko się zga…

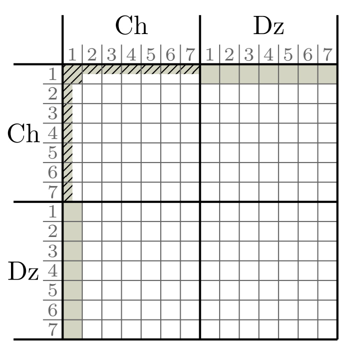
(głos z offu) – Nie! Nic się nie zgadza! Tak naprawdę masz do czynienia z sytuacją, w której losowo napotkana osoba (co z tego, że to Twój znajomy) okazuje się mieć dwójkę dzieci oraz zaczyna Ci opowiadać o jednym z nich, które okazuje się chłopcem. Rozsądnie jest przyjąć, że Twój znajomy losowo wybrał jedno ze swoich dzieci (każde z równym prawdopodobieństwem). Jeżeli znajomy jest ojcem dwóch chłopców, to na pewno opowie o chłopcu. Jeżeli jest ojcem chłopca i dziewczynki, to ma szansę 50% na to, by opowiadać o chłopcu. Ujmując rzecz nieco inaczej, ze wszystkich ojców dwojga dzieci obojga płci tylko połowa zaczęłaby opowiadać Ci o swoim synku. Twoja tabelka powinna zatem odpowiadać tej na rysunku 2. Ostatecznie z Twojej perspektywy szanse na to, że znajomy ma dwóch synków, to niezmiennie 50%!



Rys. 2. Zakreskowany obszar stanowi $1/2$ obszaru zamalowanego



Rys. 3. Liczby odpowiadają dniu tygodnia, w którym urodziło się dane dziecko. Zakreskowany obszar stanowi $13/27$ obszaru zamalowanego



Rys. 4. Zakreskowany obszar stanowi $1/3$ obszaru zamalowanego

Co innego, gdybyś sam poprosił znajomego: *Drogi kolego, proszę, zacznij mi opowiadać o jednym ze swoich synków, jeśli masz co najmniej jednego.* Zakładając, że wtedy znajomy istotnie rozpocznie jakąś opowieść (i nie postanowi zmienić miejsca siedzącego), przedstawione wcześniej rozumowanie oraz tabelka z rysunku 1 są słuszne i szansa na to, że ma on dwóch synków, faktycznie jest równa $1/3$. **Na potrzeby dalszej części historii załóżmy, że tak właśnie było.**

Monolog znajomego trwa. Znowu zająłeś się czymś innym. W którymś momencie do Twojej świadomości przebija się informacja, że wspomniany wcześniej synek urodził się w poniedziałek i od tamtego czasu poniedziałek jest ulubionym dniem tygodnia Twojego znajomego (szczęściarz!). Wiadomość ta skłoniła Cię do pewnej matematycznej refleksji.

Czy informacja, którą właśnie uzyskałem, powinna zmienić moje oszacowanie szans na to, że mój znajomy ma dwóch synków? Wydawać by się mogło, że w żadnym wypadku – przecież dzień tygodnia, w którym urodził się wspominany przez niego synek, nie może wpływać w jakikolwiek sposób na płeć pozostałego potomstwa. Jednak z drugiej strony ta wiedza sprawia, że powinienem zmodyfikować naszkicowaną wcześniej tabelkę. Teraz dla każdego dziecka, starszego i młodszego, powinienem odnotować nie tylko jego płeć, lecz również dzień tygodnia, w którym się urodziło. Zakładając, że każdy dzień tygodnia jest równoprawdopodobnym dniem urodzin, daje mi to 14 *równoprawdopodobnych konfiguracji par płeć i dzień tygodnia dla każdego z dzieci, czyli łącznie* $14^2 = 196$ *konfiguracji dla obojga dzieci. Tym razem* 27 *z nich odpowiada występowaniu chłopca urodzonego w poniedziałek, a z tego w* 13 *przypadkach pozostałe dziecko też jest chłopcem. Tak więc niniejszym moje oszacowanie prawdopodobieństwa tego, że znajomy ma dwóch chłopców, powinno się zwiększyć z* $1/3$ *do* $13/27$.

Ponieważ sytuacja Cię frapowała, przerysowałeś swoją tabelkę, uzyskując coś zbliżonego do rysunku 3 na marginesie. I chociaż z doświadczenia wiesz, że z tabelkami się nie dyskutuje, konkluzje, do których doszedłeś, wciąż Cię drażniły.

(głos z offu) – I słusznie, gdyż takie rozumowanie jest powieleniem opisanego wcześniej błędu. Tym razem należałoby uwzględnić fakt, że jeśli Twój znajomy ma dwóch chłopców, z których dokładnie jeden urodził się w poniedziałek, to zaczął opowiadać właśnie o nim, a mógł o „tym drugim" – co dwukrotnie zmniejsza prawdopodobieństwo takiej konfiguracji z Twojej perspektywy. Uwzględnienie tego w rozumowaniu kończy się odpowiedzią: $1/3$ (taką jak wcześniej), o czym można się przekonać, analizując rysunek 4. Znowu – gdybyś to **Ty** dopytał, czy znajomy ma synka urodzonego w poniedziałek, to odpowiedź twierdząca pozwoliłaby zmienić oszacowanie szans na dwóch chłopców do $13/27$, zgodnie z przedstawionym wcześniej rozumowaniem (a odpowiedź przecząca kazałaby zmniejszyć to oszacowanie do $3/10$, o czym polecamy przekonać się samodzielnie).

Po tej informacji temat dzieci się urwał. Niebawem, po wysłuchaniu jeszcze kilku przejmujących historii z życia Twojego znajomego, pociąg dojechał na miejsce – nie zaskoczyło Cię, gdy wyszło na jaw, iż obaj wysiadacie na tej samej stacji. Na peronie czekała już żona znajomego wraz z rozczochranym urwisem.

Pytanie 1. Jak teraz oceniasz szanse na to, że znajomy ma dwóch synków?

I już zaczęliście się żegnać, gdy za plecami Twojego szkolnego znajomego pojawił się nie kto inny, jak... Twoja niewidziana od dawien dawna koleżanka z przedszkola! Zanim zdążyła cokolwiek powiedzieć, krzyknąłeś do niej:

„Hej tam, nie widzieliśmy się całe wieki! Czy przypadkiem nie masz dwójki dzieci, z których co najmniej jedno jest chłopcem urodzonym w poniedziałek?".

Twoja koleżanka zaniemówiła, a po chwili uśmiechnęła się chytrze i odpowiedziała:

„Owszem, mam dwójkę dzieci, w tym co najmniej jednego chłopca, przy czym żadne z moich dzieci nie urodziło się w poniedziałek".

Pytanie 2. Jak oceniasz szanse na to, że koleżanka ma dwóch synków?

(Odpowiedzi na powyższe pytania można znaleźć na stronie 14).