Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 849 ($WT = 2{,}53$) i 850 ($WT = 2{,}92$) z numeru 11/2022

Mikołaj Pater	Opole	47,04
Janusz Olszewski	Warszawa	46,90
Paweł Najman	Kraków	39,93
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Norbert Porwol	Essen	38,01
Radosław Kujawa	Wrocław	37,96
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Szymon Tur		34,18
Piotr Kumor	Olsztyn	30,62

Pan Mikołaj Pater – trzeci raz 44 p. – więc już Weteran. A pan Janusz Olszewski, niestrudzony, po raz kolejny (który to już?) mija magiczną linię 44.

Zadania z matematyki nr 863, 864

Redaguje Marcin E. KUCZMA

863. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze $p > 2$ takie, że każda z liczb $p + 4k^2$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, p-1$, także jest liczbą pierwszą.

864. Znaleźć liczbę $C > 0$ o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ spełniającego warunki $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ oraz $x_1 + \ldots + x_n = 0$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \geqslant Cn \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Im większa stała C, tym lepsze rozwiązanie.

Zadanie 864 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2023

Przypominamy treść zadań:

855. Rozważamy funkcje $f\colon\ [0,1] \to [0,\infty)$ spełniające warunki: $f(1) = 1$ oraz

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \qquad \text{gdy} \quad x, y, x{+}y \in [0,1].$$

Wyznaczyć najmniejszą liczbę $C > 0$ o tej własności, że dla każdej rozważanej funkcji f ma miejsce oszacowanie: $f(x) \leqslant Cx$ (dla $x \in [0,1]$).

856. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg nieskończony $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ o wyrazach całkowitych dodatnich taki, że każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie raz w każdym z ciągów $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ oraz $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$, gdzie $d_i = |a_i - a_{i+1}|$.

855. Każda z rozważanych funkcji f jest niemalejąca, bowiem jeśli $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, to

$$f(b) = f(a + b - a) \geqslant f(a) + f(b - a) \geqslant f(a).$$

Skoro więc $f(1) = 1$, to $f(x) \leqslant 1$ dla wszystkich $x \in [0,1]$. Ponadto (biorąc w założeniu $x = y$) widzimy, że $f(2x) \geqslant 2f(x)$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Ustalmy liczbę $x \in (0, \frac{1}{2}]$ i niech n będzie największą liczbą naturalną, dla której $2^n x \leqslant 1$. Wówczas $f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x) \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n f(2^n x) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. A ponieważ $2^{n+1}x > 1$, czyli $2x > \left(\frac{1}{2}\right)^n$, dostajemy oszacowanie $f(x) < 2x$ dla $x \in (0, \frac{1}{2}]$. To samo oszacowanie jest słuszne także dla $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ (bo wtedy $f(x) \leqslant 1 < 2x$); zaś dla $x = 0$ mamy $f(0) \geqslant 2f(0)$, skąd $f(0) = 0$. Tak więc

$$f(x) \leqslant 2x \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in [0,1].$$

To znaczy, że stała $C = 2$ ma żądaną własność. Nie można jej zmniejszyć, co pokazuje przykład funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

dla niej $f(x)/x \to 2$ przy $x \to \frac{1}{2}+$. Zatem $C = 2$ jest najmniejszą liczbą, o którą pyta zadanie.

856. Jest wiele takich ciągów. Przykładowa konstrukcja: $(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 2)$; więc $(d_1, d_2) = (2, 1)$. Będziemy ciąg przedłużać indukcyjnie, dołączając po trzy elementy. Ustalmy $n \geqslant 1$ i załóżmy, że zostały już określone wyrazy a_i o numerach $i \leqslant 3n$ tak, że (przy określeniu $d_i = |a_i - a_{i+1}|$):

(1) ciągi $(a_1, \ldots, a_{3n})$ oraz $(d_1, \ldots, d_{3n-1})$ są różnowartościowe.

Przyjmijmy dodatkowo, że

(2) każda liczba mniejsza od a_{3n} jest obecna w ciągu $(a_1, \ldots, a_{3n})$

(*liczba* w tym zadaniu znaczy stale: liczba całkowita dodatnia); dla $n = 1$ warunek (2) jest spełniony.

Niech α będzie najmniejszą liczbą różną od $a_1, \ldots, a_{3n}$ i niech δ będzie najmniejszą liczbą różną od $d_1, \ldots, d_{3n-1}$. Z założenia (2) wynika, że $\alpha > a_{3n}$. Wprowadzamy ponadto parametr x (któremu wartość zostanie nadana później). Definiujemy:

(3) $\qquad a_{3n+1} = x, \quad a_{3n+2} = x - \delta, \quad a_{3n+3} = \alpha.$

Aby ciągi $(a_1, \ldots, a_{3n+3})$ i $(d_1, \ldots, d_{3n+2})$ były różnowartościowe, potrzeba i wystarcza, by spełnione były następujące warunki:

$$x \neq a_i, \quad x - \delta \neq a_i \quad (\text{dla } i \leqslant 3n), \quad x \neq \alpha, \quad x - \delta \neq \alpha;$$
$$|a_{3n} - x| \neq d_j, \quad |x - \delta - \alpha| \neq d_j \quad (\text{dla } j \leqslant 3n-1),$$
$$|a_{3n} - x| \neq \delta, \quad |x - \delta - \alpha| \neq \delta, \quad |a_{3n} - x| \neq |x - \delta - \alpha|.$$

Ostatni z wypisanych warunków wymaga w szczególności, by $x - a_{3n} \neq x - \delta - \alpha$; czyli by $a_{3n} \neq \alpha + \delta$; a tak jest, skoro $\alpha > a_{3n}$ (do tego było potrzebne założenie (2)). Każdy z pozostałych warunków eliminuje skończenie wiele możliwych wartości parametru x. Pozostaje nieskończenie wiele liczb (nie wyeliminowanych). Bierzemy jako x (na przykład) najmniejszą z nich. Wzory (3) określają kolejną trójkę wyrazów ciągu (a_i) (więc i ciągu (d_i)); a dzięki wypisanym warunkom zapewniają spełnienie własności (1) z n zastąpionym przez $n{+}1$. Również własność (2) przenosi się z n na $n{+}1$, bo $a_{3n+3} = \alpha$.

Przedstawiona procedura generuje nieskończone ciągi (a_i), (d_i). A ponieważ zarówno do jednego, jak i drugiego ciągu była na każdym kroku dołączana najmniejsza liczba nieobecna we wcześniej określonym odcinku ciągu (α oraz δ), gwarantuje to, że w każdym z tych ciągów znajdzie się każda liczba naturalna.

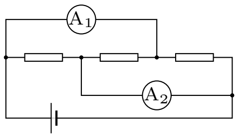
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2023

Zadania z fizyki nr 760, 761

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

760. Cienki, giętki sznurek o długości $l = 1\,\mathrm{m}$ i masie $M = 1\,\mathrm{kg}$ przyczepiony jest dwoma końcami do sufitu. Odległość od sufitu do środka sznurka $H = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Znaleźć naprężenie sznurka w najniższym punkcie oraz w odległości $H/2$ od sufitu.



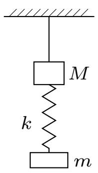
Rys. 1

761. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 wskazania amperomierzy A_1 i A_2 wynoszą, odpowiednio, 0,3 A i 0,2 A. Po zamianie dwóch oporników miejscami wskazania te nie zmieniły się. Jakie jest natężenie prądu płynącego przez baterię? Opory wewnętrzne amperomierzy i baterii są zaniedbywalne.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2023

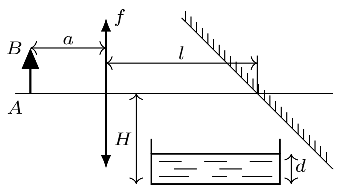
Przypominamy treść zadań:

752. Na nieważkiej nici wiszą w jednorodnym polu ciężkości dwa ciężarki o masach M i m, połączone sprężyną o współczynniku sprężystości k i zaniedbywalnej masie (rys. 2). Nić przepalono. Po jakim czasie siła naciągu sprężyny po raz pierwszy osiągnie wartość zero? Zakładamy, że do tego momentu dolny ciężarek nie uderzy jeszcze w podłoże.

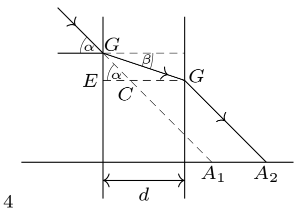


Rys. 2

753. Przedmiot AB znajduje się w odległości $a = 36\,\mathrm{cm}$ od cienkiej soczewki o ogniskowej $f = 30\,\mathrm{cm}$. W odległości $l = 1\,\mathrm{m}$ za soczewką umieszczono zwierciadło płaskie nachylone do osi optycznej soczewki pod kątem $\pi/4$ (rys. 3). W jakiej odległości H od osi optycznej soczewki należy umieścić dno naczynia z wodą, aby otrzymać na nim ostry obraz przedmiotu? Wysokość warstwy wody w naczyniu wynosi $d = 20\,\mathrm{cm}$, współczynnik załamania wody $n = 4/3$.



Rys. 3



Rys. 4

752. Po przepaleniu nici środek masy układu porusza się w dół z przyspieszeniem ziemskim g. W układzie środka masy ciężarki poruszają się względem siebie pod wpływem siły sprężystości. W chwili początkowej prędkości obu ciężarków są równe zeru, a rozciągnięcie sprężyny wynosi $x(0) = mg/k$. Opis ruchu dwóch ciał możemy zastąpić opisem ruchu jednego ciała o masie zredukowanej $\mu = mM/(m+M)$ w polu siły $F = -kx$. Okres drgań wynosi $T = 2\pi\sqrt{\mu/k}$. Siła naciągu sprężyny osiągnie wartość zero po czasie

$$t = T/4 = 0{,}5\pi\sqrt{mM/k\,(m+M)}. \tag{$*$}$$

Możemy też rozważyć ruch każdego z ciężarków na swojej części sprężyny – od środka masy do odpowiedniego ciężarka. Współczynnik sprężystości kawałka połączonego z masą m wynosi $k_1 = k\,(M+m)/M$, co wynika z równań $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ oraz $k_1/k_2 = m/M$. Ciężarki drgają w przeciwfazie, a ich okres drgań wynosi $T = 2\pi\sqrt{m/k_1} = 2\pi\sqrt{M/k_2}$. Szukany czas dany jest wzorem $(*)$.

753. Gdyby nie było zwierciadła, obraz przedmiotu powstałby w odległości $b = fa/(a-f) = 180\,\mathrm{cm}$ za soczewką. Zwierciadło powoduje, że obraz powstaje w odległości $h = b - l = 80\,\mathrm{cm}$ poniżej osi optycznej. Warstwa wody odsuwa ten obraz od osi optycznej o odcinek A_1A_2 (rys. 4). Jego długość wynosi $|A_1A_2| = d - |EC| = d - |EG|/tg\alpha$. Ostry obraz w soczewce cienkiej powstaje, gdy promienie są przyosiowe. Możemy więc zastosować przybliżenie małych kątów:

$$|A_1A_2| = d - d\beta/\alpha = d\,(1 - 1/n)\,.$$

Odległość od osi optycznej, w jakiej powinno znajdować się dno naczynia, wynosi $H = h + d\,(1 - 1/n) = 85\,\mathrm{cm}$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 748 ($WT = 2{,}4$), 749 (WT=3,47) z numeru 12/2022

Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	4–43,27
Jan Zambrzycki	Białystok	3–40,89
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–35,78
Jacek Konieczny	Poznań	38,68
Tomasz Wietecha	Tarnów	16–22,09
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–18,61
Paweł Kubit	Kraków	15,73
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1–15,23
Konrad Kapcia	Poznań	2–14,62

Pan Baniewicz omyłkowo został nieuwzględniony w poprzedniej czołówce, gdzie miał 14,75 punktów.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.