$$(\star)\qquad f'(x) \approx \partial_h f(x) := \frac{1}{h}\Im\left(f(x+ih)\right),$$

gdzie $\Im(z)$ oznacza część urojoną liczby zespolonej z, natomiast $i = \sqrt{-1}$ to jednostka urojona. To przybliżenie *nie psuje się* nawet przy bardzo małych h, a dodatkowo błąd maleje w *znacznie szybszym* tempie, co pokazuje poniższa tabela.

Błędy przybliżenia $S'(1)$ przez $\partial_h S(1)$, zaznaczone kolorowymi gwiazdkami, można też zobaczyć na wykresie na poprzedniej stronie.

h	$\partial_h F(1)$	$\partial_h G(1)$	$\partial_h S(1)$
10^{-1}	2,0000000000000000	2,9900000000000000	0,5412032600703925
10^{-2}	2,0000000000000000	2,9999000000000000	0,5403113109515962
10^{-4}	2,0000000000000000	2,9999999900000000	0,5403023067686435
10^{-8}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681399
10^{-30}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681398
10^{-100}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681398
10^{-300}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681398
10^{-310}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681550

Ostatni wiersz tabeli powinien zwrócić Twoją uwagę. Dla *patologicznie* małych h, poniżej około 10^{-308}, coś jednak znowu... zaczyna się psuć! Czy wiesz, dlaczego?

Zadania

W zeszłym miesiącu umieściliśmy w tym miejscu matematyczne „zadania z myszką", które ukazały się w *Delcie* również rok wcześniej. Chcielibyśmy uznać to za nieśmieszny primaaprilisowy żart, jednak niestety była to po prostu nasza pomyłka. Opiekuna działu, dra Dominika Burka, oraz wszystkich naszych Czytelników najmocniej za nią przepraszamy.

Redakcja

Przygotował Dominik BUREK

M 1744. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y ($x \geqslant y$) spełniona jest nierówność:

$$f(x) - f(y) \geqslant \sqrt{x-y}.$$

Rozwiązanie na str. 2

M 1745. Dane są liczby całkowite dodatnie $a \neq b$ takie, że

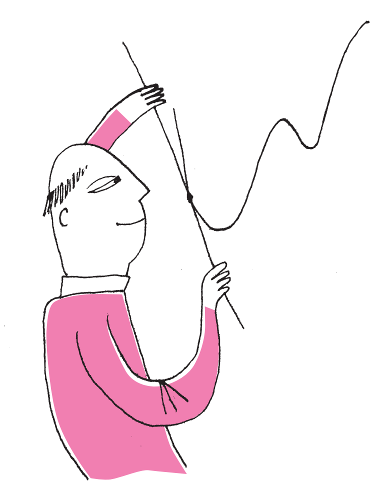
$$(a-b)^4 = a^3 - b^3.$$

Udowodnić, że liczba $9a - 1$ jest sześcianem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 3

M 1746. Dane są trzy szkoły, w każdej z nich uczy się 200 uczniów. Każdy uczeń ma przynajmniej jednego znajomego w każdej ze szkół (znajomość jest wzajemna oraz nikt nie jest znajomym samego siebie). Przypuśćmy, że istnieje zbiór A, zawierający 300 uczniów, o następującej własności: dla dowolnej szkoły S oraz dwóch uczniów x, y ze zbioru A, którzy nie uczą się w S, x i y mają różną liczbę znajomych uczących się w szkole S. Udowodnić, że istnieje trzech uczniów z trzech różnych szkół, którzy wzajemnie się znają.
Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1071. Podczas jazdy z prędkością v na samochód działa siła oporu powietrza opisana wzorem: $F_{op} = \frac{1}{2}C\rho S v^2$, w którym ρ jest gęstością powietrza, S powierzchnią przekroju samochodu prostopadłą do prędkości, a C jest współczynnikiem związanym z kształtem samochodu. Na jakim odcinku drogi l energia W potrzebna do pokonania oporu powietrza podczas jazdy ze stałą prędkością równa jest energii kinetycznej E_k samochodu? W obliczeniach przyjmij $\rho = 1{,}3$ kg/m^3 oraz wartości typowe dla samochodu osobowego: $m = 1{,}3 \cdot 10^3$ kg, $S = 2$ m^2, $C = 0{,}3$.
Rozwiązanie na str. 14



F 1072. Ciężar Q wskazywany przez wagę na powierzchni Ziemi jest pomniejszony o siłę wyporu powietrza. Gdyby nie było atmosfery, to na jaką wysokość h nad powierzchnią Ziemi musielibyśmy się wznieść, żeby nasz ciężar (siła przyciągania przez Ziemię) był równy Q? W obliczeniach przyjmij: gęstość powietrza na powierzchni Ziemi $\rho = 1{,}3$ kg/m^3, promień Ziemi $R = 6400$ km, gęstość wody $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 16