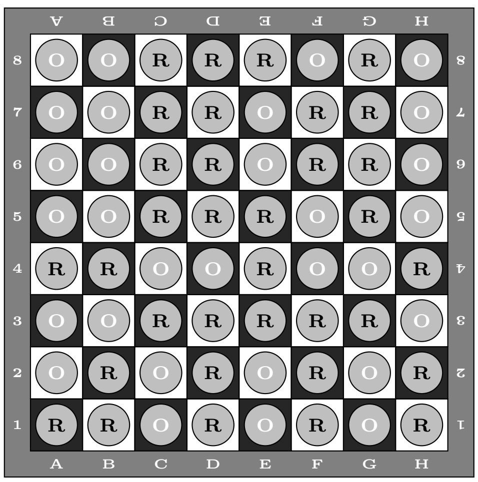
(Nie)możliwa do rozwiązania zagadka

*Izabela MANDLA**

* Studentka, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Wyobraźmy sobie taką sytuację: dwóch więźniów dostaje możliwość wydostania się na wolność pod warunkiem, że uda im się rozwiązać pewną zagadkę. (Chyba nie ma na świecie systemu penitencjarnego, który dopuszczałby taką ewentualność, ale nie psujmy opowieści roztrząsaniem takich szczegółów!). Strażnik, który ich pilnuje, przygotował dla nich problem logiczny, który na pierwszy rzut oka mógłby się wydawać niemożliwy do rozwiązania. A oto, co im powiedział:

W celi obok na stole leży zwykła szachownica 8 na 8. Jednak na jej polach nie leżą pionki, a monety. Na każdym polu leży dokładnie jedna moneta i może ona być odwrócona do góry orłem lub reszką. Za godzinę przyjdę po ciebie – tu wskazał na więźnia o imieniu Bob – *zaprowadzę do tej celi i wskażę ci pewne pole na szachownicy. Następnie będziesz musiał odwrócić dokładnie jedną monetę. Potem do celi przyprowadzę Eda* – tu pokazał na drugiego więźnia – *i jego zadaniem będzie odgadnąć, które pole wskazałem. Jeśli mu się to uda, obaj wychodzicie na wolność.*



Oto, co mógł zobaczyć Ed. Czy Bob mógł mu w ten sposób przekazać informację o polu wskazanym przez strażnika?

Czy jest możliwe, aby więźniowie mieli pewność wyjścia na wolność? Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie. Oczywiście nie bierzemy pod uwagę sytuacji, że pierwszy więzień powiedział drugiemu półgębkiem czy też pokazał na migi, które pole wskazał strażnik. Niezależnie od powodów, dla których wylądowali za kratkami, na pewno nie dopuściliby się zbrodni zepsucia dobrej zagadki, nawet gdy stawką jest ich wolność! Zostaje tylko plansza i to, co na niej leży. Dobrze, ale czy da się to wykorzystać? Czy jest jakaś strategia, na którą mogą umówić się więźniowie, przy której dzięki odwróceniu jednej monety da się przekazać informację o polu wskazanym przez strażnika?

O dziwo, odpowiedź jest twierdząca! Jest to wspaniała zagadka, która zdecydowanie zasługuje na odrobinę samodzielnego zastanowienia, aby należycie docenić jej trudność. Dlatego – by nie zepsuć zabawy Czytelnikowi Ambitnemu, który sam zechciałby się z nią zmierzyć – rozwiązanie przedstawione jest dopiero na stronie 18 tego wydania *Delty*.

Przekątna kwadratu nie jest współmierna z jego bokiem

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

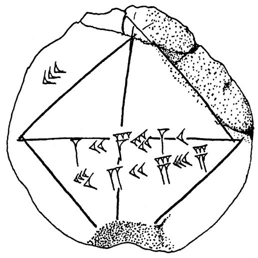
Eksponat YBC 7298, Yale Babylonian Collection (New Haven). Więcej informacji o tabliczce można znaleźć tu: `https://news.yale.edu/2016/04/11/3800-year-journey-classroom-classroom`

W starożytnej Mezopotamii – kraju położonym między Eufratem a Tygrysem – około 4000 lat temu posługiwano się sześćdziesiątkowym systemem pozycyjnym. Oznacza to, że w charakterze cyfr używano liczb od 0 do 59 zamiast od 0 do 9 („podręczna” tabliczka mnożenia w tym systemie zawiera 1830 iloczynów, od 1×1 do 60×60). Przyjmowano wówczas, że długość przekątnej kwadratu jednostkowego jest równa

$$L = (1; 24\ 51\ 10)_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}414213962962\ldots$$

To świetny wynik, bo liczba $[(1; 24\ 51\ 10)_{60}]^2 = (1; 59\ 59\ 59\ 38\ 1\ 40)_{60} \approx 1{,}999998$ jest bardzo bliska 2. Długość przekątnej kwadratu o boku a wyznaczano ze wzoru $L \cdot a$.

Dowodem na to, że starożytni mieszkańcy Mezopotamii posiadali taką wiedzę, jest babilońska gliniana tabliczka (około 1700 roku p.n.e.).



Źródło: A. Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics*, Washington, DC, MAA, 1964

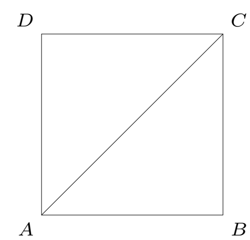
Bok kwadratu oznaczono liczbą 30. Na jednej przekątnej napisano 1; 24 51 10, a pod nią 42; 25 35, co jest wynikiem pomnożenia pierwszej liczby przez 30, czyli stanowi długość przekątnej. Przeprowadzone obliczenia budzą szacunek! A wszystko to 1200 lat przed okresem, w którym przypuszczalnie żył Pitagoras.

Pod koniec V lub na początku IV wieku p.n.e. Pitagorejczycy pokazali, że przekątna kwadratu nie jest współmierna z jego bokiem, czyli iloraz przekątnej i boku nie jest liczbą wymierną (pisał o tym Platon w *Teajtecie* i Arystoteles w *Analitykach pierwszych*). Świat dowiedział się o istnieniu liczb niewymiernych. Około 370 roku p.n.e. Eudoksos stworzył teorię proporcji sankcjonującą posługiwanie się liczbami niewymiernymi i metodę wyczerpywania. Kropkę nad „i" postawił w XIX wieku Richard Dedekind, kończąc konstrukcję zbioru liczb rzeczywistych, ale to inna historia… Dokonania Eudoksosa opisał Euklides w *Elementach* (III w. p.n.e.). Choć *Elementy* są najdonioślejszym dziełem naukowym świata, to jak dotąd nie doczekały się kompletnego tłumaczenia na język polski (istnieją tłumaczenia wybranych ksiąg).

Z *Elementów* Euklidesa (księga X) znamy uzasadnienie, że:

Przekątna kwadratu nie jest współmierna z jego bokiem.

Dowód. Niech AC będzie przekątną kwadratu, a AB jego bokiem. Załóżmy, że AC jest współmierne z AB, niech $a : b$ będzie ich stosunkiem liczbowym wyrażonym przez możliwie najmniejsze liczby naturalne.



Mamy $AC : AB = a : b$. Zatem $AC^2 : AB^2 = a^2 : b^2$. Ale (z twierdzenia Pitagorasa, *Elementy*, I.47) $AC^2 = 2 \cdot AB^2$. Stąd $a^2 = 2b^2$. Wynika z tego, że a^2, a co za tym idzie również a, jest parzyste; skoro zaś $a : b$ jest wyrażone przez możliwie najmniejsze liczby, b jest nieparzyste.

Skoro a jest parzyste, niech $a = 2c$. Wówczas $4c^2 = 2b^2$, czyli $2c^2 = b^2$, z czego wynika, że b jest parzyste.

Założenie, że AC jest współmierne z AB, prowadzi do wniosku, że ta sama liczba b jest jednocześnie parzysta i nieparzysta, więc musi być fałszywe. $\square$

Rozwiązanie zadania M 1744. Przypuśćmy, że istnieje funkcja f spełniająca opisany w zadaniu warunek. Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$f(1) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \geqslant n\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{n}.$$

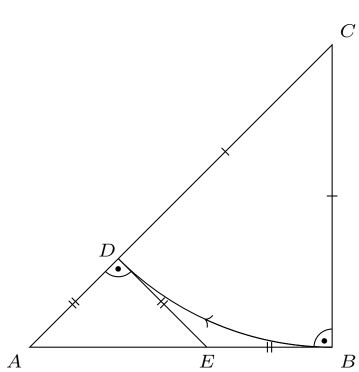
Biorąc n takie, że $f(1) - f(0) < \sqrt{n}$, otrzymujemy sprzeczność.

W szczególności, *długości przekątnej kwadratu jednostkowego nie można wyrazić jako proporcji między dwoma liczbami naturalnymi* (co oznacza, że rozwinięcie dziesiętne nie kończy się ani nie zawiera okresu).

Godfrey H. Hardy w *Apologii matematyka* (1940) pisał o tym odkryciu tak: „(…) [jest] to proste twierdzenie – proste zarówno w zamyśle, jak i zastosowaniu – lecz nie ma cienia wątpliwości, że należy do twierdzeń najwyższej klasy. (…) jest równie aktualne i istotne jak wtedy, gdy zostało odkryte – dwa tysiące lat nie naznaczyły [go] żadną zmarszczką".

Pozostając w klimacie matematyki greckiej, zastosujemy dowody poprzez *reductio ad absurdum* (sprowadzenie do sprzeczności) i przedstawimy dwa kolejne – pełne matematycznego uroku – uzasadnienia ostatniego wniosku.

Rozumowanie 1. (Tom M. Apostol, *Irrationality of The Square Root of Two – A Geometric Proof*, 2000). Załóżmy, że długość przekątnej kwadratu jednostkowego jest liczbą wymierną. Istnieją wtedy trójkąty równoramienne i prostokątne, których wszystkie boki są całkowitej długości. Niech trójkąt ABC będzie najmniejszym trójkątem o tych własnościach.



Na przeciwprostokątnej odkładamy odcinek CD o długości odcinka CB i w punkcie D wystawiamy prostopadłą, która przecina bok AB w punkcie E. Wówczas trójkąt ADE jest *mniejszym* trójkątem równoramiennym i prostokątnym, którego wszystkie boki mają długości całkowite (patrz rysunek obok). Sprzeczność. Zatem długość przekątnej kwadratu jednostkowego jest liczbą niewymierną! $\square$

Jeszcze inne uzasadnienie niewymierności $\sqrt{2}$ można znaleźć w artykule Adama Barańskiego *Uogólnienie algorytmu Euklidesa*, Δ^5_{21}.

O metodzie Herona można przeczytać w *Delcie*, na przykład w artykule Piotra Krzyżanowskiego i Grzegorza Łukaszewicza *Przez wieki z metodą Newtona*, Δ^9_{21}.

Rozumowanie 2. Załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Istnieje wtedy najmniejsza liczba naturalna k taka, że $k\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną. Wówczas $k\sqrt{2}-k$ jest *mniejszą* liczbą o tej własności. Sprzeczność! □

Pozostał problem wyznaczenia przybliżonej wartości $\sqrt{2}$. Heron z Aleksandrii około 60 roku n.e. opisał rekurencyjne postępowanie: $x_1 = 2$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ dla $n = 1, 2, \ldots$, w którym każda kolejna iteracja coraz dokładniej przybliża wartość $\sqrt{2}$, podwajając liczbę cyfr znaczących po przecinku:

$$x_2 = \tfrac{3}{2} = 1{,}5,$$

$$x_3 = \tfrac{17}{12} = \mathbf{1{,}41}66\ldots,$$

$$x_4 = \tfrac{577}{408} = \mathbf{1{,}41421}56\ldots,$$

$$x_5 = \tfrac{665857}{470832} = \mathbf{1{,}41421356}23745\ldots,$$

$$x_6 = \tfrac{886731088897}{627013566048} = \mathbf{1{,}4142135623730950}488016896\ldots \text{ itd.}$$

Podstawą tej idei jest pomysł, że jeśli x_n jest przeszacowaniem, a $\frac{2}{x_n}$ jest niedoszacowaniem, lub odwrotnie, to średnia arytmetyczna tych liczb może być lepszym przybliżeniem $\sqrt{2}$ niż każda z nich z osobna. Pokażemy, że procedura Herona jest zbieżna.

(1) Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony z dołu przez $\sqrt{2}$, bo

$$x_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{x_n^2+2}{2x_n}\right)^2 - 2\left(\frac{2x_n}{2x_n}\right)^2 = \left(\frac{x_n^2-2}{2x_n}\right)^2 \geqslant 0.$$

(2) $x_{n+2} \leqslant x_{n+1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$, bo

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{2}{x_{n+1}}\right) - x_{n+1} = \frac{2 - x_{n+1}^2}{2x_{n+1}} \leqslant 0,$$

gdyż $x_{n+1}^2 \geqslant 2$.

Skoro ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony z dołu i nierosnący, to jest zbieżny. Jego granicą jest pierwiastek równania $g = \frac{1}{2}\big(g + \frac{2}{g}\big)$ spełniający nierówność $g \geqslant \sqrt{2}$, czyli w tym przypadku $g = \sqrt{2}$.

Zbieżność ciągu $\{x_n\}$ do granicy $\sqrt{2}$ jest *kwadratowa*, tzn. różnica między kolejnym przybliżeniem a granicą $\sqrt{2}$ maleje jak kwadrat poprzedniej różnicy:

(3) $|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \big|\frac{1}{2}\big(x_n + \frac{2}{x_n}\big) - \sqrt{2}\big| = \frac{|x_n - \sqrt{2}|^2}{2|x_n|} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|x_n - \sqrt{2}|^2.$

To właśnie kwadratowa zbieżność jest odpowiedzialna za to, że liczba cyfr znaczących podwaja się przy każdej iteracji.

Algorytm Herona jest skuteczny w przypadku obliczania pierwiastka kwadratowego $\sqrt{A}$ dla dowolnego $A > 0$, gdzie jako pierwsze przybliżenie można wybrać dowolną liczbę dodatnią.

Rozwiązanie zadania M 1745.
Dzieląc obustronnie równość z treści zadania przez $a - b \neq 0$, otrzymamy

$$(a-b)^3 = a^2 + ab + b^2.$$

Niech $k = a - b$, wówczas

$$k^3 = k^2 + 3ab = k^2 + 3bk + 3b^2.$$

Równanie kwadratowe

$$3X^2 + 3kX + k^2 - k^3 = 0$$

ma współczynniki całkowite oraz pierwiastek całkowity b, zatem wyróżnik tego równania $\Delta = k^2(12k-3)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Stąd $12k - 3 = \ell^2$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ. Rozpatrując uzyskane równanie modulo 6, łatwo zauważymy, że $\ell = 6m - 3$ dla pewnej liczby całkowitej m. Wobec tego

$$k = \frac{1}{12}(l^2 + 3) = 3m^2 - 3m + 1$$

i kolejno

$$b = \frac{-3k + \sqrt{\Delta}}{6} = \frac{-3k + kl}{6} = (m-1)(3m^2 - 3m + 1),$$

$$a = b + k = m(3m^2 - 3m + 1)$$

oraz $9a - 1 = (3m-1)^3$.

Prostota, pomysłowość, piękno i użyteczność w jednym, uzyskana w wyniku pracy wielu pokoleń! To wszystko dzięki temu, że matematyka przemieszcza się z pokolenia na pokolenie, z miejsca na miejsce i rozwija, jest „żywym organizmem".

Pitagoras wywodzi swoją matematykę z Jonii, gdzie jeszcze 100 lat przed nim Tales odkrywał pierwsze twierdzenia i dostrzegał wielką wartość dowodzenia ich prawdziwości. Obaj, zanim zaczną zajmować się matematyką, odbywają podróże do Egiptu i Mezopotamii. Od ostatniego Pitagorejczyka Archytasa z Tarentu uczy się jej Eudoksos oraz Platon, i w ten sposób matematyka trafia do Aten. Stamtąd wędruje do Aleksandrii. Tam pisze swoje *Elementy* Euklides, tam studiują Archimedes i Apoloniusz, a w późniejszych wiekach działają Heron, Ptolemeusz, Diofantos, Pappus. *Pax Romana*, powstanie chrześcijaństwa i islamu zmieniają świat. Justynian edyktem z 529 roku likwiduje Akademię Platona, a matematyków umieszcza wśród złoczyńców i innych podobnych. Matematyka przenosi się do Indii (Arjabhata, Brahmagupta, Bhaskara), a później z powrotem do Mezopotamii i Azji Środkowej (Muhammad al-Chwarizmi, Omar Chajjam), i koło się zamyka. Spuściznę arabską przejmuje nauka europejska, matematyka ponownie rozkwita w Europie. Wspaniały owoc pojawia się w XVII wieku, to rachunek różniczkowy i całkowy.

Wartość $\sqrt{2}$ ma praktyczne zastosowanie! Rozmiary papieru formatu A0, A1, A2,... (normy ISO 216) zostały tak zaprojektowane, żeby po podzieleniu na dwie równe części wzdłuż dłuższego boku uzyskać dwa arkusze o tych samych proporcjach długości do szerokości. Jest to możliwe tylko, jeśli ten stosunek wynosi $\sqrt{2}$. Oczywiście rzeczywiste wymiary są zaokrąglone do pełnych milimetrów.