Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2023

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Z radością dzielimy się wiadomością, że **dr Marcin Kuczma** został laureatem Nagrody Głównej PTM im. Samuela Dicksteina za rok 2022.

Wyróżnienie to jest przyznawane za osiągnięcia w dziedzinie edukacji matematycznej, popularyzacji i historii matematyki.

Laureatowi serdecznie gratulujemy!

Redakcja

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 847 ($WT = 2{,}07$) i 848 ($WT = 2{,}13$) z numeru 10/2022

Stanisław Bednarek	Łódź	45,84
Krzysztof Zygan	Lubin	45,83
Tomasz Wietecha	Tarnów	44,88
Janusz Olszewski	Warszawa	42,04
Mikołaj Pater	Opole	41,88
Paweł Najman	Kraków	39,93
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Radosław Kujawa	Wrocław	37,96
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Norbert Porwol	Essen	37,50

Trzy nazwiska – i trzy różne poziomy wciągnięcia w naszą klubową zabawę. Pan Stanisław Bednarek – właśnie został Weteranem Klubu 44 M. Pan Krzysztof Zygan – nowa twarz w Klubie 44 M. Zaś pan Tomasz Wietecha – to już czternasty raz; biorąc pod uwagę szesnaście rund w Klubie 44 F – jest czego gratulować!

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 746 ($WT = 2{,}63$), 747 ($WT = 2{,}43$) z numeru 11/2022

Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	4–40,07
Jan Zambrzycki	Białystok	3–39,61
Jacek Konieczny	Poznań	33,68
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–33,38
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Tomasz Wietecha	Tarnów	16–18,65
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–18,61
Paweł Kubit	Kraków	15,73
Konrad Kapcia	Poznań	2–11,18

Zadania z matematyki nr 861, 862

Redaguje Marcin E. KUCZMA

861. Trójkąt ABC jest równoramienny: $AC = BC$. Punkt D leży na boku AC, przy czym $2\,AD = BD$. Punkt E leży na odcinku BD, przy czym $2\,BE = AD$. Wykazać, że $\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle CED$.

862. Dany jest graf skierowany o skończenie wielu wierzchołkach (każde dwa różne wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź zorientowana). Każda krawędź jest pokolorowana jednym z m kolorów; zaś z każdego wierzchołka wychodzi więcej niż m krawędzi. Udowodnić, że z każdego wierzchołka można poprowadzić nieskończenie wiele nieskończonych ścieżek takich, że dla każdej liczby naturalnej k krawędzie przechodzone w k-tym kroku na wszystkich tych ścieżkach mają jednakowy kolor. (Nieskończona ścieżka to nieskończony ciąg kolejno przyległych krawędzi – początkiem kolejnej jest koniec poprzedniej).

Zadanie 862 zaproponował pan Adam Woryna z Rudy Śląskiej.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2023

Przypominamy treść zadań:

853. Rozstrzygnąć, czy suma skończenie wielu czworokątów wklęsłych o rozłącznych wnętrzach może być wielokątem wypukłym (czworokąt wklęsły to taki, w którym jeden z kątów wewnętrznych jest większy od kąta półpełnego). Czy odpowiedź zmieni się, jeśli zamiast wklęsłych czworokątów będziemy rozważać wklęsłe pięciokąty?

854. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że liczba przedstawień n w postaci sumy dwóch nieujemnych liczb trójkątnych jest równa liczbie przedstawień liczby $4n+1$ w postaci sumy kwadratów dwóch nieujemnych liczb całkowitych (utożsamiamy przedstawienia różniące się tylko kolejnością składników).

853. Dla czworokątów jest to niemożliwe. Dowód: przypuśćmy, że suma n czworokątów wklęsłych o rozłącznych wnętrzach jest wielokątem wypukłym W. Punkty będące wierzchołkami wklęsłych kątów wewnętrznych tych czworokątów nazwijmy punktami krytycznymi. Jasne, że żaden z nich nie może leżeć na brzegu wielokąta W. Przy tym każdy z czworokątów ma dokładnie jeden wierzchołek krytyczny oraz każdy punkt krytyczny jest wierzchołkiem dokładnie jednego z owych czworokątów. Ustala to bijekcję między czworokątami oraz punktami krytycznymi. Jest więc dokładnie n punktów krytycznych; i wszystkie leżą wewnątrz wielokąta W.

Kąt pełny wokół dowolnie wybranego punktu krytycznego rozpada się na jeden kąt wklęsły pewnego czworokąta oraz część pozostałą, która jest kątem mniejszym od półpełnego – musi więc być albo kątem wewnętrznym innego czworokąta, albo sumą kilku kątów wewnętrznych innych czworokątów. W takim razie miary kątów naszych czworokątów przy wierzchołkach będących punktami krytycznymi sumują się do wartości $n \cdot 360^\circ$. Wszelako tyle samo wynosi suma miar *wszystkich* ich kątów wewnętrznych. To by znaczyło, że żaden ich wierzchołek nie leży na brzegu wielokąta W; nonsens. Sprzeczność uzasadnia odpowiedź *nie* na pierwsze pytanie zadania.

Dla pięciokątów odpowiedź brzmi *tak*. Przykład: w dowolnym czworokącie wypukłym łączymy dwa przeciwległe wierzchołki zygzakowatą łamaną trójodcinkową, rozcinając go na dwa pięciokąty wklęsłe.

854. Weźmy pod uwagę dowolne przedstawienie liczby n w postaci sumy dwóch liczb trójkątnych:

$$n = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2}.$$

Ustalmy oznaczenia tak, by $k \geqslant l \geqslant 0$. Określamy:

$$(*) \qquad a = k+l+1, \qquad b = k-l \qquad (\text{więc } a > b \geqslant 0);$$

wówczas:

$$a^2 + b^2 = 2k^2 + 2l^2 + 2k + 2l + 1 = 4n+1.$$

I na odwrót: niech będzie dane dowolne przedstawienie liczby $4n+1$ w postaci sumy dwóch kwadratów: $4n+1 = a^2+b^2$. Liczby a, b muszą być różnej parzystości. Ustalmy oznaczenia tak, by $a > b \geqslant 0$. Określamy:

$$(**) \quad k = \frac{a+b-1}{2}, \qquad l = \frac{a-b-1}{2} \qquad (\text{więc } k \geqslant l \geqslant 0);$$

wówczas:

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} = \frac{(a+b)^2-1}{8} + \frac{(a-b)^2-1}{8} = \frac{a^2+b^2-1}{4} = n.$$

Przyporządkowania $(k,l) \mapsto (a,b)$ oraz $(a,b) \mapsto (k,l)$, dane wzorami $(*)$ i $(**)$, są wzajemnie odwrotne. Określają zatem bijekcję między rozważanymi przedstawieniami liczb n oraz $4n+1$.

Klub 44 F

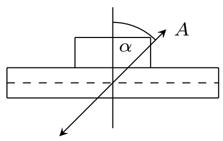
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2023

Zadania z fizyki nr 758, 759

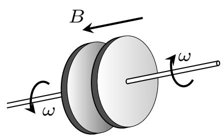
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

758. Pozioma podstawka, na której leży klocek, drga harmonicznie z częstotliwością $f = 10$ Hz w kierunku tworzącym kąt $\alpha = \pi/4$ z pionem (rys. 1). Współczynnik tarcia klocka o podstawkę: $\mu = 0{,}5$. Jakie warunki musi spełniać amplituda drgań, aby klocek zaczął pełznąć po podstawce, ale nie podskakiwał?

759. Dwie jednakowe okrągłe, płaskie, metalowe płytki umieszczone tak, jak pokazano na rysunku 2, obracają się z prędkością kątową ω w przeciwne strony w polu magnetycznym prostopadłym do powierzchni płytek. Indukcja pola magnetycznego wynosi B, a odległość między płytkami d. Osie płytek połączono przewodnikiem. Znaleźć napięcie między punktami płytek, które znajdują się naprzeciw siebie, a ich odległość od środka płytki wynosi r.



Rys. 1



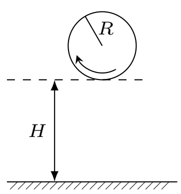
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 1/2023

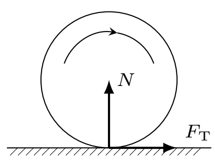
Przypominamy treść zadań:

750. Koło rowerowe spada swobodnie z wysokości H (rys. 1) i po odbiciu podskakuje na wysokość h. Koło to rozkręcono do prędkości kątowej ω_0 i puszczono swobodnie z tej samej wysokości. Pod jakim kątem do pionu odbije się ono od podłoża? Współczynnik tarcia między kołem a podłożem wynosi μ, promień koła R. Zakładamy, że cała masa koła skupiona jest na jego obwodzie.

751. Kondensator płaski naładowany ładunkiem Q wypełnia płytka z dielektryka o stałej dielektrycznej ε. Powierzchnia okładek wynosi S, odległość między okładkami jest równa d. Znaleźć energię zgromadzoną w dielektryku w wyniku jego polaryzacji. Przyjąć, że dielektryk jest niepolarny.



Rys. 3



Rys. 4

750. Podczas zderzenia na koło działa w kierunku pionowym zmienna w czasie siła reakcji $N(t)$ (rys. 4). Oznaczając czas zderzenia koła z podłożem przez T, prędkość koła w kierunku pionowym tuż przed zderzeniem przez v, a zaraz po odbiciu przez u, możemy napisać:

$$(1)\qquad M(v+u) = \int_0^T N(t)dt, \text{ gdzie } M \text{ jest masą koła, } v = \sqrt{2gH}, \quad u = \sqrt{2gh}.$$

Ponieważ zderzenie trwa bardzo krótko, średnia wartość siły reakcji znacznie przewyższa wartość siły grawitacji, której nie będziemy uwzględniać. Dopóki występuje poślizg, na koło działa w kierunku poziomym siła tarcia $F_T = \mu N$, która nadaje przyspieszenie w ruchu postępowym i hamuje ruch obrotowy. Załóżmy, że czas poślizgu τ jest nie większy niż czas zderzenia, i oznaczmy przez $V(t)$ prędkość w kierunku poziomym, a przez $\omega(t)$ prędkość kątową. Spełnione są równania:

$$(2)\qquad MV(\tau) = \mu \int_0^\tau N(t)dt,$$

$$(3)\qquad I[\omega(\tau) - \omega_0] = -\mu R \int_0^\tau N(t)dt, \text{ gdzie } I = MR^2,$$

$$(4)\qquad V(\tau) = R\omega(\tau), \text{ stąd:}$$

$$(5)\qquad \int_0^\tau N(t)dt = (M\omega_0 R)/2\mu \leqslant \int_0^T N(t)dt.$$

Z równań (1) i (5) otrzymujemy:

$$v + u \geqslant \omega_0 R/2\mu, \quad \omega_0 \leqslant 2\mu(v+u)/R = \omega_{kr}.$$

Otrzymaliśmy krytyczną wartość prędkości kątowej ω_{kr}, dla której poślizg kończy się dokładnie w tej samej chwili, kiedy kończy się odbicie. Gdy $\omega_0 \leqslant \omega_{kr}$, po zakończeniu poślizgu siła tarcia znika, prędkość ruchu w kierunku poziomym pozostaje stała i zgodnie z (2) i (5) wynosi $V(\tau) = \omega_0 R/2$. Szukany kąt odbicia określa wzór:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \omega_0 R/2u = \omega_0 R/2\sqrt{2gh}.$$

Gdy $\omega_0 > \omega_{kr}$, zgodnie z (1) $V = V(T) = \mu(v+u)$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \mu(v+u)/u = \mu\left(\sqrt{H/h} + 1\right)$.

751. Dielektryk w naładowanym kondensatorze ulega polaryzacji – rozsuwają się ładunki w jego cząsteczkach, w wyniku tego na powierzchniach stykających się z okładkami kondensatora powstają ładunki indukowane. Można je znaleźć, wyrażając natężenie pola E wewnątrz kondensatora na dwa sposoby – za pomocą ładunków indukowanych Q_1 lub za pomocą stałej dielektrycznej: $E = (Q - Q_1)/(\varepsilon_0 S) = Q/(\varepsilon_0\varepsilon S)$, gdzie ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni. Stąd

$$(6)\qquad Q_1 = Q(\varepsilon - 1)/\varepsilon.$$

Energia dielektryka W_d jest to praca, jaką trzeba wykonać, aby go spolaryzować. Załóżmy, że umieściliśmy dielektryk w nienaładowanym kondensatorze, w jakiś sposób go spolaryzowaliśmy, wykonując pracę W_d (np. rozsuwając ładunki rękami), i na jego powierzchniach powstały ładunki $\mp Q_1$. Następnie ładujemy kondensator, przenosząc ładunki z jednej okładki na drugą, cały czas trzymając ładunki w dielektryku. Wykonujemy przy tym pracę

$$(7)\qquad L = \int_0^Q \left(\frac{q}{c_0} - \frac{Q_1}{c_0}\right)dq = \frac{Q^2}{2c_0} - \frac{Q_1 Q}{c_0},$$

gdzie $c_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

Po naładowaniu przestajemy trzymać ładunki w dielektryku, bo trzyma je siła elektryczna. Energia naładowanego kondensatora wypełnionego dielektrykiem wynosi $W = Q^2/2\varepsilon c_0$. W kolejnym kroku rozładowujemy kondensator, przenosząc ładunki w drugą stronę. Wydzieli się przy tym ciepło W. Bilans energii ma postać $W_d + L = W$, stąd:

$$(8)\qquad W_d = W - W_0 + Q_1 Q/c_0, \text{ gdzie } W_0 = Q^2/2c_0.$$

Podstawiając (6) do (8), otrzymujemy szukaną energię dielektryka: $W_d = Q^2(\varepsilon - 1)d/2\varepsilon_0\varepsilon S$.