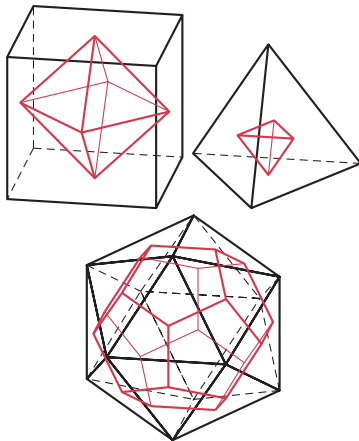
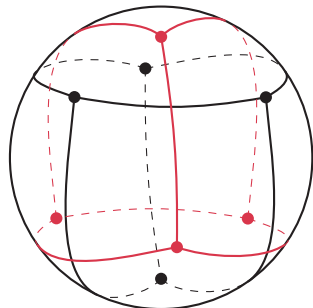


* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski; Instytut Matematyczny PAN



Rys. 1. Wielościany foremne z dualnymi w środku

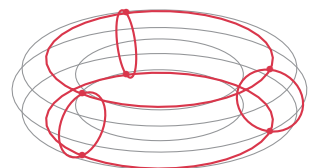


Rys. 2. Siatka nadmuchanego czworościanu oraz siatka do niej dualna

Więcej o charakterystyce Eulera przeczytać (i zobaczyć) można w poniższych źródłach:

- [1] Joanna Jasznińska, $W - K + S = 2$, Δ_{16}^3
- [2] Michał Miśkiewicz, *O trójkątach na sferze*, Δ_{20}^2
- [3] Jan Rempała, *Jeszcze raz o wzorze Eulera, czyli zastosowanie stawów i grobli w stereometrii*, Δ_{76}^1
- [4] 3Blue1Brown, *Euler's Formula and Graph Duality*, youtu.be/-90Uyo8NFZg

Każde z nich zawiera dowód wzoru Eulera lub też odnośnik do dowodu. Historię tego twierdzenia omawia w obecnym numerze na str. 6 Grzegorz Łukaszewicz.



Rys. 3. Przykładowa siatka na torusie złożona z 6 wierzchołków, 12 krawędzi i 6 czworokątnych ścian, a więc o charakterystyce Eulera równej 0. Tak jest zresztą dla każdej siatki na torusie

Z dualnością spotykamy się już w szkole – wiszące w wielu pracowniach matematycznych modele brył platońskich naturalnie łączą się w dualne pary. Jeśli w sześcianie połączymy środki sąsiednich ścian krawędziami, to we wnętrzu sześcianu powstanie ośmiościan foremny (rys. 1). Gdybyśmy podobną procedurę przeprowadzili dla ośmiościanu, dostalibyśmy z powrotem sześcian, tylko mniejszy. W taki sam sposób *dualną* parę tworzą dwunastościan z dwudziestościanem, jak również czworościan... z samym sobą. Nic nie stoi na przeszkodzie, by spróbować tej konstrukcji dla dowolnych wielościanów wypukłych. No, prawie nic.

Zadanie 1. Skonstruować wielościan wypukły, dla którego połączenie środków ciężkości sąsiednich ścian krawędziami nie daje w wyniku wielościanu.

(Rozwiązania zadań zamieszczonych w niniejszym artykule znajdują się na str. 14).

Jak widać, dotychczasowa konstrukcja zawodzi w ogólnym przypadku. Nadmuchajmy więc nasz wielościan jak balon. Traci on wtedy swój kanciasty kształt, ale na powierzchni powstałej sfery nadal widzimy krzywoliniową *siatkę* \mathcal{S} wielościanu (rys. 2), i to na niej skupimy uwagę. Na każdej ze ścian \mathcal{S} wyróżnimy jeden punkt, a następnie połączmy łukami wyróżnione punkty z sąsiednich ścian. Należy tylko zadbać, by dany łuk przecinał jedynie krawędź oddzielającą te dwie ściany oraz by łuki na siebie nie zachodziły. W ten sposób powstała nowa, dualna siatka \mathcal{S}' – jej ścianami nazwiemy obszary wycięte poprzez wybrane przez nas łuki.

W tym przypadku rysunek jest mniej estetyczny, ale nadal możemy przyporządkować ścianom \mathcal{S} wierzchołki \mathcal{S}' i na odwrót, bo każda ze ścian \mathcal{S}' zawiera dokładnie jeden wierzchołek \mathcal{S} . Krawędzie \mathcal{S} i \mathcal{S}' też łączymy w pary, patrząc na przecięcia między nimi.

Dualność a charakterystyka Eulera. Oznaczmy liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian siatki \mathcal{S} odpowiednio przez V_0, V_1, V_2 . Charakterystyka Eulera tej siatki, oznaczana przez $\chi(\mathcal{S})$, jest zdefiniowana jako naprzemienna suma i różnica $V_0 - V_1 + V_2$.

Zadanie 2. Obliczyć χ dla siatek wyznaczonych na sferze przez wielościany foremne.

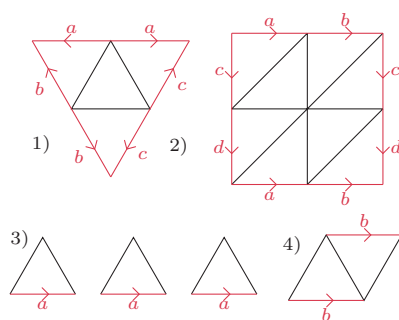
W rozwiązaniu zadania 2 może nieznacznie pomóc dualność. Otóż o ile liczba ścian dwudziestościanu foremnego jest dobrze znana (jest ich 20), to przy liczeniu wierzchołków można napotkać trudność. Jeśli jednak mamy w pamięci wielościan dualny, to wiemy, że wierzchołków jest 12 – tyle, co ścian w dwunastościanie foremnym. Z policzeniem krawędzi nie pójdziemy jednak na skróty; z dualności wynika jedynie, że dwudziestościan i dwunastościan mają ich tyle samo.

Taką samą obserwację można poczynić nieco ogólniej: jeśli siatka \mathcal{S} ma wierzchołków, krawędzi i ścian odpowiednio V_0, V_1, V_2 , to siatka dualna \mathcal{S}' ma ich odpowiednio V_2, V_1, V_0 . W szczególności zachodzi równość $\chi(\mathcal{S}) = \chi(\mathcal{S}')$.

Jeśli Czytelnik rozwiązał zadanie 2, to wie już, że w każdym przypadku wyszło 2. I jest to ogólna zasada, znana jako wzór Eulera: $\chi(\mathcal{S}) = 2$ dla dowolnej siatki \mathcal{S} na sferze. Skądinąd jeden z możliwych dowodów tego twierdzenia opiera się na dualności – można się z nim zapoznać w artykule Jana Rempały lub filmiku 3Blue1Brown (szczegóły na marginesie).

Zadanie 3. Siatka na torusie może mieć charakterystykę Eulera różną od 2 (zob. rys. 3). Gdyby w tym przypadku spróbować powtórzyć wspomniany wyżej dowód, to najwyraźniej w którymś miejscu się załamuje – gdzie dokładnie?

Regularne siatki dwu- i trzywymiarowe. Od teraz skupimy się na siatkach złożonych z trójkątów, czyli tzw. *triangulacjach*. Nie ogranicza to znacząco ogólności naszych rozważań, ponieważ każdy n -kąć wypukły można pociąć na $n - 2$ trójkąty, a w konsekwencji każdą siatkę wielokątną można rozdrobnić do siatki trójkątnej.

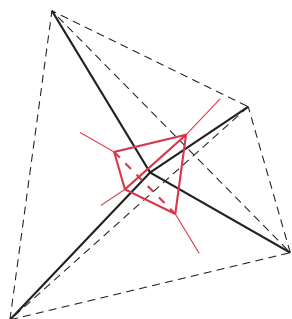


Rys. 4. Przykładowe siatki: 1) sfera, 2) torus, 3) „książka”, 4) powierzchnia boczna walca

W literaturze fachowej obiekt otrzymany ze sklejenia regularnej siatki trójkątnej nazywa się *topologiczną rozmaitością dwuwymiarową zamkniętą* lub prościej – *topologiczną powierzchnią zamkniętą*.

W przypadku siatki trójwymiarowej (złożonej z czworokątów) mówimy o *topologicznej rozmaitości trójwymiarowej zamkniętej*.

Mówienie o ścianach różnego wymiaru (0, 1, 2, 3) należy do standardowej terminologii w tej dziedzinie. Upprzedzę jednak Czytelnika, że określenie *antypody* przyjąłem *ad hoc*, nie znalazłszy żadnego odpowiedniego terminu w literaturze.



Rys. 5. Fragment trójwymiarowej siatki \mathcal{S} (cztery czworokąty spotykające się w jednym wierzchołku, na czarno) i dualnej siatki \mathcal{S}' (czworokąty i części sąsiednich wielościanów, kolorem)

Na rysunku 3 pokazano, że siatki można rysować na przeróżnych powierzchniach, nie tylko na sferze. Odwrócimy teraz kolejność: mamy zadaną siatkę, czyli kolekcję trójkątów, wraz z opisem sklejenia ich krawędzi; spójrzmy na otrzymaną po sklejeniu powierzchnię. Dla ilustracji, na rysunku 4 widać siatki dające sferę i torus, jak również dwie siatki opisujące mniej regularne obiekty. Przez *regularność* rozumiemy tu, że po wygładzeniu kątów otrzymujemy gładką powierzchnię bez brzegu; dla pełnej ścisłości przyjmujemy następującą definicję:

Definicja 1. Siatkę trójkątną nazwiemy regularną, jeśli:

1. Każda krawędź należy do dokładnie dwóch ścian siatki.
2. Każdy wierzchołek należy do pewnej liczby ścian kolejno połączonych krawędziami (pierwsza z drugą etc., a ostatnia z pierwszą).

Na podobnej zasadzie możemy rozważać siatkę trójwymiarową: kolekcję czworokątów wraz z przepisem sklejenia ich ścian. Jeśli spróbujemy wyobrazić sobie efekt takiego sklejenia, to w większości przypadków wyobraźnia nas zawiedzie, ale nie przejmujemy się tą drobnostką. Istotniejsze jest, że w tym przypadku również niektóre siatki są lepsze od pozostałych. *Regularne* wyróżniają się tym, że każdy niewielki fragment po sklejeniu wygląda jak trójwymiarowa przestrzeń pocięta na czworokąty. Tym razem ścisła definicja jest nieco trudniejsza do sformułowania:

Uwaga: Od teraz wierzchołki (punkty), krawędzie (odcinki), ściany dwuwymiarowe (trójkąty) i ściany trójwymiarowe (czworokąty) – wszystkie będziemy nazywać ścianami, odpowiednio, 0-, 1-, 2- i 3-wymiarowymi.

Definicja 2. Rozważmy ścianę k -wymiarową A ($k = 0, 1, 2$). Dla każdego czworokątanu T zawierającego A określimy *antypody* A w T jako tę $(2 - k)$ -wymiarową ścianę T , która jest rozłączna z A . Innymi słowy: w czworokątanie T antypody wierzchołka to przeciwległa ściana i vice versa, natomiast antypody krawędzi to przeciwległa krawędź.

Definicja 3. Siatkę trójwymiarową nazwiemy regularną, jeśli dla dowolnej k -wymiarowej ściany A ($k = 0, 1, 2$) spełniony jest następujący warunek: antypody A we wszystkich czworokątach zawierających A układają się w siatkę sfery $(2 - k)$ -wymiarowej. Zależnie od wymiaru k oznacza to, że tworzą one zwyczajną sferę ($k = 0$), okrąg ($k = 1$) lub parę punktów ($k = 2$).

Zadanie 4. Sformułować definicję 3 w sposób analogiczny do definicji 1, przynajmniej w przypadku, gdy A jest ścianą 1- lub 2-wymiarową.

Ten trudny wstęp pojęciowy służył temu, by móc sformułować twierdzenie o charakterystyce Eulera regularnych siatek trójwymiarowych. Powinno być ono zaskakujące: o ile w dwóch wymiarach znajomość $\chi(\mathcal{S})$ pozwala rozpoznawać kształt powierzchni zadanej przez \mathcal{S} (2 dla sfery, 0 dla torusa etc.), to w trzech wymiarach nie daje nie!

Twierdzenie. Dla danej regularnej siatki trójwymiarowej \mathcal{S} oznaczmy przez V_0, V_1, V_2, V_3 liczbę ścian odpowiedniego wymiaru. Wówczas charakterystyka Eulera $\chi(\mathcal{S}) = V_0 - V_1 + V_2 - V_3$ wynosi zero.

Dualność a charakterystyka raz jeszcze. Powyższe twierdzenie zaatakujemy, patrząc na siatkę dualną. Zaczniemy od następującego nieścisłego argumentu:

Dowód heurystyczny. Rozważmy siatkę \mathcal{S}' dualną do \mathcal{S} : każdy czworokątan \mathcal{S} zadaje wierzchołek \mathcal{S}' i ogólnie każda k -wymiarowa ściana \mathcal{S} zadaje ścianę $(3 - k)$ -wymiarową \mathcal{S}' . Zamiast precyzyjnej definicji najlepiej zilustruje tę konstrukcję rysunek 5. Odnotujmy, że \mathcal{S}' nie jest już siatką złożoną z czworokątów – dopuszcza inne wielościany, a nawet inne wielokąty.

Zgodnie z konstrukcją, liczba ścian k -wymiarowych siatki \mathcal{S}' (dla $k = 0, 1, 2, 3$) wynosi dokładnie V_{3-k} . Stąd

$$\chi(\mathcal{S}') = V_3 - V_2 + V_1 - V_0 = -\chi(\mathcal{S}).$$

Jednocześnie obie siatki, \mathcal{S} i \mathcal{S}' , po sklejeniu dają tę samą figurę. Jeśli tylko uwierzmy, że charakterystyka jest taka sama dla każdej możliwej siatki tworzącej tę figurę, czyli w szczególności $\chi(\mathcal{S}') = \chi(\mathcal{S})$, to poprzednia równość implikuje, że $\chi(\mathcal{S}) = 0$. □

Ten prosty argument można przekuć w solidny dowód, opierając się na teorii homologii, kohomologii i dualności Poincarégo. Zamiast tego posłużymy się jednak elementarnym kombinatorycznym rozumowaniem, w którym – mam nadzieję – widać ślady powyższego zgrabnego pomysłu.

Dowód Twierdzenia. Oprócz oznaczenia V_0, V_1, V_2, V_3 na liczbę ścian, wprowadźmy bardziej szczegółowe oznaczenie na pary ścian dla $0 \leq i < j \leq 3$:

$N_{ij} :=$ liczba par ścian (A, B) wymiarów i oraz j , dla których $A \subseteq B$.

Przykładowo, N_{13} zlicza wszystkie pary postaci (krawędź, czworościan zawierający tę krawędź). Odnajdujemy teraz szereg równości wiążących te liczby:

$$\begin{cases} N_{01} = 2 \cdot V_1 \\ N_{02} = N_{12} \\ N_{03} - N_{13} + N_{23} = 2 \cdot V_3 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{23} = 2 \cdot V_2 \\ N_{12} = N_{13} \\ N_{01} - N_{02} + N_{03} = 2 \cdot V_0 \end{cases}$$

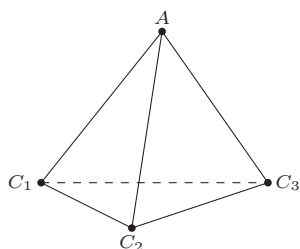
Teza twierdzenia wynika stąd łatwo w dwóch krokach:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (V_0 - V_1 + V_2 - V_3) &= (N_{01} - N_{02} + N_{03}) - N_{01} + N_{23} - (N_{03} - N_{13} + N_{23}) = \\ &= N_{13} - N_{02} = 0. \end{aligned}$$

Zajmijmy się więc najpierw prawą kolumną. Zastanówmy się, jaki wkład w liczbę N_{23} ma pojedyncza 2-wymiarowa ściana A . Otóż po jej każdej stronie jest jedna 3-wymiarowa ściana, co razem daje dwie szukane pary (A, B) (ściśle rzecz biorąc, powołaliśmy się tu na definicję 3). Rozpatrując wszystkie A – których jest V_2 – otrzymujemy równość $N_{23} = 2 \cdot V_2$. Podobnie zauważamy, że dla każdej 1-wymiarowej ściany A liczba 2- i 3-wymiarowych ścian B zawierających A jest taka sama. Po zsumowaniu: $N_{12} = N_{13}$.

Wreszcie, jeśli ustalimy 0-wymiarową ścianę A , to zgodnie z definicją 3 antypody A we wszystkich 3-wymiarowych ścianach zawierających A układają się w siatkę sfery; siatkę tę oznaczmy przez \mathcal{P} . Zauważmy przy tym, że k -wymiarowe ściany \mathcal{P} odpowiadają $(k+1)$ -wymiarowym ścianom \mathcal{S} zawierającym A (jak na rys. 6). Stąd wnioskujemy, że wkład A w sumę $N_{01} - N_{02} + N_{03}$ jest dokładnie charakterystyką Eulera siatki \mathcal{P} na sferze, a więc wynosi 2. Sumując po wszystkich A , otrzymujemy pożądaną równość $N_{01} - N_{02} + N_{03} = 2 \cdot V_0$.

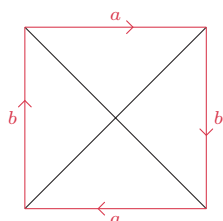
Dowód równości z lewej kolumny jest dualny (należy ustalić B zamiast A) i prostszy, gdyż nie wymaga powoływania się na definicję 3. Pozostawię więc tę przyjemność Czytelnikowi jako **zadanie 5**. \square



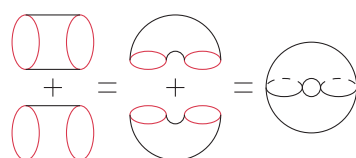
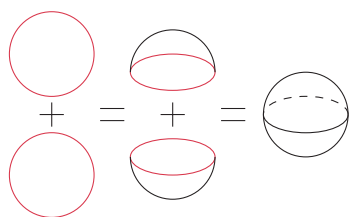
Rys. 6. Ilustracja odpowiedniości ścian \mathcal{P} i \mathcal{S} na przykładzie pojedynczej 3-wymiarowej ściany $AC_1C_2C_3$:

\mathcal{P}	\mathcal{S}
C_1	AC_1
C_1C_2	AC_1C_2
$C_1C_2C_3$	$AC_1C_2C_3$

Definicję regularnej siatki trójwymiarowej z brzegiem otrzymujemy, odpowiednio rozszerzając definicję 3: należy dopuścić możliwość, że figura złożona z antypodów układu się w półsferę odpowiedniego wymiaru (zwyčajną półsferę, odcinek lub punkt).



Rys. 7. Siatka płaszczyzny rzutowej



Rys. 8. Konstrukcja dubletu w przypadku dwuwymiarowym. Dla dysku otrzymujemy sferę, a dla powierzchni bocznej walca – torus

Czy płaszczyzna rzutowa ma wewnątrz? Na zakończenie wróćmy do problemu z artykułu *Z butelki Kleina i Salomon nie należy?*, Δ_{23}^3 . Otóż powierzchnie mogą być pozbawione brzegu (jak sfera, torus, butelka Kleina, płaszczyzna rzutowa...) lub też mieć brzeg złożony z jednego lub więcej okręgów (wstęga Möbiusa, powierzchnia boczna walca...). Podobnie może być z figurami trójwymiarowymi, i naturalne jest pytanie: które z powierzchni mogą się pojawić jako *brzeg* figury trójwymiarowej?

W artykule *Z butelki Kleina i Salomon nie należy?* wskazaliśmy konstrukcję figur, dla których brzegiem jest sfera, torus i butelka Kleina. Dla płaszczyzny rzutowej to jednak niemożliwe!

Stwierdzenie. Płaszczyzna rzutowa, czyli powierzchnia zadana przez sklejenie siatki z rysunku 7, nie jest brzegiem żadnej regularnej figury trójwymiarowej.

Dowód. Przypuśćmy, że taka figura \mathcal{M} istnieje. Dowód oprzemy na konstrukcji tzw. *dubletu*: bierzemy dwie kopie \mathcal{M} i sklejemy je wzdłuż brzegu, otrzymując nową trójwymiarową figurę, już pozbawioną brzegu (co pozwala zastosować wcześniej zaprezentowane twierdzenie).

Możemy przyjąć, że figura \mathcal{M} jest zadana przez regularną trójwymiarową siatkę \mathcal{S} , a brzegowe ściany tej siatki tworzą dwuwymiarową siatkę \mathcal{P}

płaszczyzny rzutowej. Rozważamy dublet \mathcal{D} – siatkę złożoną z dwóch kopii \mathcal{S} , ale z dodatkowym sklejeniem odpowiadających ścian \mathcal{P} w jednej i drugiej kopii. Otrzymaliśmy w ten sposób regularną siatkę trójwymiarową bez brzegu, co na mocy naszego twierdzenia pozwala wnioskować, że $\chi(\mathcal{D}) = 0$.

Ostatnim brakującym elementem układanki jest charakterystyka Eulera \mathcal{P} . Łatwo odczytać, że charakterystyka siatki z rysunku 7 wynosi $3 - 6 + 4 = 1$, nie jest jednak oczywiste, że będzie tak dla dowolnej siatki. Można jednak ten problem sprowadzić do przypadku sfery (ze względu na trudność niech będzie to zadanie z gwiazdką), przyjmiemy więc za znane, że $\chi(\mathcal{P}) = 1$.

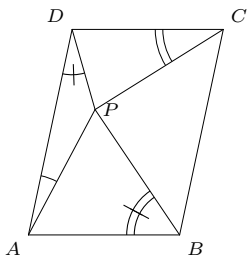
Zadanie 6*. Mając zadaną siatkę \mathcal{S}_1 na płaszczyźnie rzutowej, skonstruować na sferze siatkę \mathcal{S}_2 o dwukrotnie większej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian. Wywnioskować, że $\chi(\mathcal{S}_1) = 1$.

Czas na podsumowanie. Liczba wierzchołków \mathcal{D} różni się od liczby wierzchołków \mathcal{P} o liczbę parzystą, mianowicie o dwukrotność liczby wierzchołków *we wnętrzu* \mathcal{S} ; tak samo jest zresztą z liczbą ścian dowolnego wymiaru. W konsekwencji również różnica $\chi(\mathcal{D}) - \chi(\mathcal{P})$ jest parzysta. Otrzymana sprzeczność (liczba $0 - 1$ wcale nie jest parzysta!) dowodzi, że płaszczyzna rzutowa nie może być brzegiem. \square

Ciąg dalszy? Badanie abstrakcyjnych różnicowości (czyli regularnych figur) trójwymiarowych jest niewątpliwie wymagającym zajęciem. Jak to jednak bywa, matematycy poszli jeszcze dalej, i w roku 1954 francuski matematyk René Thom podał pełną odpowiedź na pytanie: które różnicowości są brzegami, a które nie, i to w dowolnym wymiarze. Jeśli Czytelnik chciałby dowiedzieć się więcej, dalszą drogę polecam zacząć od lektury hasła *Cobordism* (od francuskiego *bord* – brzeg) na Wikipedii. Upprzedzę tylko – droga jest długa!



Zadania



Przygotował Dominik BUREK

M 1741. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = 2\sphericalangle ADP$ oraz $\sphericalangle DCP = 2\sphericalangle DAP$.

Udowodnij, że $AB = PB = PC$.

Rozwiązanie na str. 8

M 1742. Niech x, a, b, c i d będą parami różnymi liczbami całkowitymi takimi, że

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) - 4 = 0.$$

Udowodnij, że $x = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$.

Rozwiązanie na str. 6

M 1743. Niech n i r będą nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że żadna z liczb

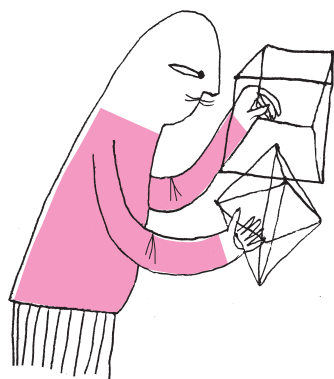
$$n^2 + r - k(k + 1), \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

nie jest liczbą dodatnią złożoną lub równą -1 . Udowodnij, że liczba $4n^2 + 4r + 1$ jest pierwsza albo równa 1 lub 9.

Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1069. Podczas jazdy po płaskim torze kierowca ma do pokonania dwa zakręty, które zmieniają kierunek jazdy o 90° i mają promienie $r_1 = 170$ m oraz $r_2 = 85$ m. Kierowca jedzie z maksymalną prędkością, przy jakiej nie wypada jeszcze z drogi. Tor jest wąski – zakręt należy pokonać po łuku okręgu, a nawierzchnia na zakrętach pozostaje pozioma. Jaki jest stosunek czasów, w jakich kierowca pokona te zakręty? Do obliczeń przyjmij, że współczynnik tarcia opon o asfalt wynosi $f = 0,9$. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s².
Rozwiązanie na str. 9



F 1070. Jednym z mechanizmów rozpoznawania kierunku do źródła dźwięku jest rejestracja różnicy czasu dotarcia sygnału do ucha lewego i prawego. Przyjmuje się, że minimalna rozpoznawalna różnica czasów dla uszu człowieka wynosi około $\Delta t = 10$ μ s. Oszacuj, z jaką dokładnością potrafimy ustalić kierunek, z jakiego dociera do nas dźwięk z odległego źródła, gdy stosujemy wspomniany mechanizm? Prędkość dźwięku wynosi $c = 340$ m/s, a średnica ludzkiej głowy (odległość między uszami) wynosi $d \approx 22$ cm.
Rozwiązanie na str. 17