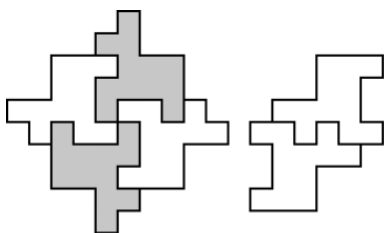


Czytelnika Zainteresowanego tworzeniem algorytmów operujących na zbiorach krawędzi kraty muszą dodatkowo ostrzec przed pewnymi subtelnosciami związanymi ze stosowaniem geometrycznych przekształceń. Zwykle przesunięcia o wektor (których przy układaniu nie da się uniknąć) skrywają niespodzianki, ponieważ jeśli $\Delta x + \Delta y$ jest nieparzyste, po przesunięciu o wektor $[\Delta x, \Delta y]$ krawędzie pionowe przejdą na poziome, co jest dalece niewłaściwe. Na podobne „trudności” należy uważać przy obrotach i odbiciach symetrycznych.

W poprzednim artykule o kubominie, Δ_{22}^8 , naszkicowałem dowód faktu, że obwód 36 jest minimalny.



Przykład zestawu części (4 identyczne), których „zachłanne” układanie nie pozwala uzyskać minimalnego obwodu

Poliomino nazywamy *wypukłym*, gdy każdy jego wiersz i kolumna są „w jednym kawałku”. Nie należy tego mylić z klasycznym pojęciem wypukłości występującym w geometrii.

w przypadku programu układającego kubomino nie było to do niczego potrzebne (pole jest zawsze takie samo). Niestety, przedstawione *bezmysłne* obliczenia nie pozwalają wyznaczyć maksymalnej długości prostej krawędzi.

Teraz może odsunąć kraty na bok i pochylmy się nad strategią poszukiwania kształtów minimalizujących obwód. Wspomniałem, że przy dopasowywaniu części można, wykorzystując wielokrotne wywołania rekurencyjne, sprawdzić kilka optymalnych położenia konkretnego elementu (sprawdzenie wszystkich jest dalece nierealne; Czytelnik Zaprawiony w Szacowaniach może zastanowić się, jak wielka jest liczba możliwych układów). Alternatywnie, można wykorzystać te wywołania do sprawdzania różnych kolejności dodawania elementów (11! to dla komputera nie aż tak dużo), a wybór pomiędzy „równorzędnymi” ustawieniami danej części uczynić losowym. Gdy testowałem oba podejścia, to właśnie ta druga wersja programu znacznie częściej układała z kubomin coś o małym obwodzie.

Zachłanny i randomizowany algorytm poszukujący minimalnego obwodu zdołał wypełnić swoje zadanie, ponieważ znalazł układ o obwodzie 36. Po dłuższym czasie wyprodukował jeszcze trzy inne tego typu rozwiązania. Niemniej tutaj pojawiają się pytania teoretyczne: czy musiało mu się to udać?

Można znaleźć takie zestawy części, których obwodu nie da się zminimalizować poprzez dokładanie każdego kolejnego elementu tak, aby osiągnąć najdłuższy możliwy styk. W przykładzie zamieszczonym na marginesie ułożenie symetryczne daje łączną długość styków równą 24 (obwód 40). Gdy jednak zechcemy wykorzystać maksymalny styk pomiędzy dwoma elementami (ma długość 7), to osiągnięcie takiego rezultatu nie będzie możliwe. Zachęcam Czytelnika do poszukania własnego przykładu – może uda się znaleźć taki złożony z zaledwie 3 części lub taki, dla którego łatwiej zauważyć pożądane własności?

Może siatki sześciannu mają jakąś własność, która gwarantuje osiągalność minimalnego obwodu przy zachłannej strategii? W oczy rzuca się fakt, że wszystkie one są wypukłymi poliominami. Czy ma to jakiś związek ze skutecznością algorytmu? Pytanie to może być bardzo trudne, ale Nauce to nie powinno przeszkadzać.

Rozwiązania zadań do artykułu „Oblicza dualności” ze strony 1

1. Rozważmy dwa ostrosłupy prawidłowe o wierzchołkach P, Q sklejone wspólną podstawą $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Jeśli punkt A_1 zamienimy na jakiś pobliski punkt A'_1 poza płaszczyzną podstawy, to w otrzymanym wielościanie wypukłym $A'_1 A_2 A_3 A_4 A_5 P Q$ środki odcinków $A'_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A'_1$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. W konsekwencji również środki ścian łączących te odcinki z P nie tworzą płaszczyzny.

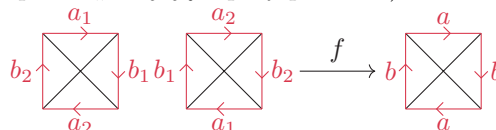
2. Czworoscian: $4 - 6 + 4 = 2$. Sześciąt: $8 - 12 + 6 = 2$. Ośmiościan: $6 - 12 + 8 = 2$. Dwunastościan: $20 - 30 + 12 = 2$. Dwudziestościan: $12 - 30 + 20 = 2$.

3. Wspomniany dowód w ukryty sposób korzysta z twierdzenia Jordana, które mówi rzecz następującą: w grafie na sferze dowolny cykl prosty rozcina sferę na dwie części. Podobne stwierdzenie nie jest prawdziwe na torusie.

4. $k = 2$: Każda ściana (dwuwymiarowa) należy do dokładnie dwóch czworoscianów. $k = 1$: Każda krawędź należy do pewnej liczby czworoscianów kolejno połączonych ścianami. (Warunek dla wierzchołka trudno jest sformułować w podobny sposób).

5. Kolejne równości otrzymujemy, ustalając B odpowiedniego wymiaru (1, 2, 3) i odnotowując, że:
– każda krawędź ma dwa końce;
– każdy trójkąt ma tyle samo wierzchołków co krawędzi (czyli 3);
– charakterystyka Eulera brzegu czworoscianu to $4 - 6 + 4 = 2$;
a następnie sumując po wszystkich B .

6*. Poniżej lewy diagram przedstawia sferę \mathbb{S} (w sposób nawiązujący do zszywania poszewki na poduszkę), a prawy płaszczyznę rzutową \mathbb{P} . Funkcja f posyła każdy z punktów \mathbb{S} na odpowiedni punkt \mathbb{P} przez przesunięcie (w ten sposób „sklejając” pary punktów).



Jeśli teraz na \mathbb{P} mielibyśmy daną *dowolną* siatkę, to biorąc przeciwobrazy jej V wierzchołków przy funkcji f , uzyskalibyśmy $2V$ wierzchołków na \mathbb{S} ; czyniąc podobnie dla krawędzi i ścian, otrzymalibyśmy siatkę na \mathbb{S} o żądanej własności.

Człowiek na czipie

Dlaczego leki otrzymywane dzięki nowoczesnym procedurom biotechnologicznym są tak drogie? Nawet jeżeli udowodniono ich skuteczność w zwalczaniu dotychczas nieuleczalnych i śmiertelnych chorób – ceny leków i terapii niejednokrotnie przekraczają finansowe możliwości jednostki i społeczeństwa.

Szukając odpowiedzi na takie pytania, natrafiamy na przewidziane przez prawo procedury poprzedzające wprowadzenie leku na rynek. Należy realizować etapy badań sprawdzających działanie i bezpieczeństwo analitycznie opisanego preparatu: badanie wpływu na mikroorganizmy, na hodowle komórek i tkanek, na wybrane zwierzęta laboratoryjne, wreszcie na kolejno wzrastającą liczbę pacjentów, którzy świadomie wyrazili zgodę na eksperymentalną terapię. Ryzykowne terapie dopuszcza się jedynie po wyczerpaniu dostępnych metod laboratoryjnych. Uważa się, że z 10 tysięcy badanych substancji, po przejściu wymaganych testów, do badań klinicznych z udziałem ludzi trafia 5 z nich, a zarejestrowana do leczenia zostaje jedna.

Przyjrzyjmy się, dla przykładu, jednemu z warunków legalizacji leku: konieczności jego przetestowania na zwierzętach. W tej dziedzinie ludzkość przeszła długą drogę, od czasów starożytnych. Dziś za kluczowe uznaje się poszukiwanie procedur o możliwie najniższym stopniu dokuczliwości – warto pamiętać, że każde prowadzenie zwierzęcia przez doświadczenie eliminuje jego przydatność do jakichkolwiek kolejnych procedur. Brutalnie mówiąc – zwierzę po eksperymencie jest zabijane. Lokalny przykład na rozmiar potrzeb: w 2019 roku w polskich laboratoriach do doświadczeń wykorzystano 143 103 zwierzęta, w tym 74 714 myszy, 23 334 szczury, 11 469 danieli przegowanych, 6 275 kur, 1 050 świń i 1 054 króliki. Doświadczenia prowadzono również na 12 kotach, 9 psach, 387 owcach i 492 karpach. Liczby światowe są znacznie wyższe. W przybliżeniu, dla wprowadzenia na rynek 45 nowych leków „zużywa się” 3 miliony zwierząt. Nie dziwi zatem fakt, że mimo stałego śledzenia sytuacji przez krajowe i globalne instytucje i organizacje problem zabijania zwierząt znajduje się na czele wymagających rozwiązania w przemyśle farmaceutycznym i kosmetycznym. Niestety pozytywne wyniki uzyskane w testach na zwierzętach w badaniach klinicznych potwierdzają się tylko w przypadku 10% sprawdzanych substancji.

Istnieje zatem nadal konieczność podejmowania badań i ustalania procedur, które zmniejszyłyby te zatrważające liczby. Wszystkie badania modelowe, łącznie z modelami informatycznymi, nie dostarczają danych o wpływie substancji leczniczej na cały organizm indywidualnego człowieka, współzależności reakcji na lek tkanek i narządów, znaczenia płci, wieku i środowiska życia pacjenta.

W końcu 2021 roku Kongres Stanów Zjednoczonych i Prezydent USA podjęli odpowiednie decyzje, a następnie Federalna Agencja ds. Żywności i Leków (FDA) postanowiła odstąpić od dotychczasowego wymogu dostarczenia wyników doświadczeń na gryzoniach, psach i małpach w procesie legalizacji leku. Uwaga: nie będzie się wymagać takich prób, co nie oznacza ich prawnego zakazu.

Nauka reaguje na wymagania polityczne i społeczne. Szeroko donosi się o postępach w konstrukcjach urządzeń „medialnie” nazywanych „Człowiek na czipie”. Są to niewielkie komory przepływowe wyłożone od wewnątrz warstwami żywych komórek (ludzkich) z różnych tkanek, omywanych cieczą podtrzymującą ich żywotność. Komórki mogą pochodzić od leczonego pacjenta. Można kolejno łączyć komory pokryte komórkami wątroby, nerwowymi, nerki, serca czy płuc, analizując obmywającą ciecz oraz zmiany w samych komórkach. Jeżeli w cieczy znajduje się badany „kandydat” na lek, to tworzymy dynamiczny układ kontroli jego działania na czipie.

Oczywiście takiemu czipowi daleko do ludzkiego organizmu, ale stanowi on postęp w porównaniu z badaniami dwuwymiarowymi w hodowlach stacjonarnych jednego typu komórek, jednocześnie będąc alternatywną metodą dla testów na zwierzętach.

Nie ulega wątpliwości, że całość zagadnienia, analizowanego z wielu stron, ma istotną, czasem o znaczeniu decyzyjnym, cechę filozoficzną i etyczną. Ale o tym... innym razem.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Modele Wszechświata dla początkujących

Część 4: Jak dawno? Jak daleko?

Szymon CHARZYŃSKI*

*Katedra Metod Matematycznych Fizyki,
Wydział Fizyki Uniwersytetu
Warszawskiego

Astronomowie regularnie zadziwiają nas kolejnymi fascynującymi odkryciami dotyczącymi obiektów znajdujących się w niewyobrażalnych odległościach od nas, liczonych w miliardach lat świetlnych. Niejednokrotnie spotkałem się z pytaniem, co *tak naprawdę* znaczy ta odległość. Tego rodzaju dyskusja odbyła się także w redakcji *Delty* przy okazji omawiania *Aktualności* do Δ_{20}^{10} napisanych przez naszego człowieka w LIGO-Virgo-KAGRA, Michała Bejgera. Tekst dotyczył detekcji sygnału promieniowania grawitacyjnego pochodzącego ze źródła GW190521. Pojawiła się w nim informacja, że odległość do źródła sygnału wynosi 5,3 Gpc, czyli około 17 miliardów lat świetlnych, ale zdarzenie będące źródłem sygnału nastąpiło około 7 miliardów lat temu. Powstaje oczywiście wątpliwość, czy podane informacje nie są sprzeczne i czy nie została tu popełniona zwykła literówka. Okazuje się, że redagując teksty popularnonaukowe, należy zawsze zachować ostrożność... ponieważ o żadnej literówce ani sprzeczności nie ma tu mowy. Trzeba tylko dobrze zdefiniować, co to znaczy „jak daleko”.

O którą odległość chodzi? Informacje o odległych obiektach astronomicznych docierają do nas jako sygnały promieniowania elektromagnetycznego lub grawitacyjnego. Choć umiejętność rejestrowania tego drugiego ludzkość opanowała stosunkowo niedawno, to informacje pozyskane dzięki detekcjom fal grawitacyjnych są bardzo istotne z punktu widzenia kosmologii. Oba te rodzaje promieniowania rozchodzą się w próżni z tą samą skończoną prędkością, zwaną *prędkością światła* i zwyczajowo oznaczaną *c*. Dlatego rejestrację sygnału od jego emisji dzieli nie tylko duża odległość, ale również długi czas. Ponieważ Wszechświat się zmienia, to jego stan w chwili detekcji jest inny, niż był w chwili emisji. W szczególności skala odległości we Wszechświecie uległa zmianie – Wszechświat się rozszerzył i odległości między Galaktykami wzrosły.

Kiedy więc ktoś podaje odległość do źródła sygnału, to możemy mieć wątpliwości, którą z następujących możliwości ma na myśli:

- A. odległość do źródła w chwili emisji sygnału,
- B. drogę, jaką pokonał sygnał,
- C. odległość do źródła w chwili rejestracji sygnału.

Odległość B jest jednoznacznie powiązana z czasem, jaki upłynął od emisji – stosunek drogi, jaką pokonał sygnał, do czasu to po prostu prędkość światła *c*. Zauważmy dalej, że z punktu widzenia fotonu lecącego przez rozszerzający się Wszechświat przestrzeń puchnie zarówno przed nim, jak i za nim. Oznacza to, że odległość B znajdzie się pomiędzy A i C. Czyli wymienione odległości w rozszerzającym się Wszechświecie będą uporządkowane rosnąco od A do C (w szczególności będą różne). W większości przypadków, gdy astronomowie mówią o odległości, to podają odległość C (jeżeli nie jest wprost powiedziane, że chodzi o coś innego).

Warto tutaj podkreślić, że do wyznaczenia relacji pomiędzy tymi trzema rodzajami odległości konieczne jest odwołanie się do modelu matematycznego. Model taki opisuje losy źródła po emisji sygnału, który odbieramy.

W przypadku sygnałów, które leciały do nas miliardy lat, oznacza to obliczanie na podstawie modelu, jak zmieni się odległość do źródła w czasie miliardów lat, które upłyną po akcie emisji. To, jaki model kosmologiczny przyjmujemy jako „obowiązujący” do opisu naszego Wszechświata, ma więc kluczowe znaczenie. Dlatego warto zastanowić się nad tym, co astronomowie mierzą, a co wyciągają z modelu.

Co mierzymy bezpośrednio? Fala elektromagnetyczna lub grawitacyjna docierająca do naszego detektora jest opisywana przez dwa parametry: częstotliwość i amplitudę. Obie te wielkości możemy mierzyć. Zwykle sygnał jest kombinacją fal o różnych częstotliwościach i amplitudach. Zależność amplitudy od częstotliwości nazywamy widmem sygnału – i to jest coś, co mierzymy.

Pierwsza detekcja fal grawitacyjnych miała miejsce w 2015 roku, o czym pisaliśmy w *Aktualnościach* w Δ_{16}^4 .



Pewne własności takich modeli kosmologicznych omówiliśmy w poprzednich częściach tego cyklu, Δ_{23}^1 , Δ_{23}^2 i Δ_{23}^3 .



Rozwiązanie zadania F 1070.

Gdy źródło jest odległe, możemy założyć, że kierunki, z jakich dźwięk dociera do każdego z uszu, są równoległe. Wówczas różnica rejestrowanych czasów dotarcia do uszu będzie spełniała związek:

$$c\Delta t = d \sin \alpha,$$

α oznacza tu kąt, z jakiego dociera dźwięk. Kąt α mierzymy od prostopadłej do prostej łączącej uszy (od kierunku na wprost przed nami). Oznacza to, że jesteśmy w stanie rozpoznać kąt

$$\alpha = \arcsin \frac{c\Delta t}{d}.$$

Dla przyjętych w treści danych $\alpha \approx 0,9^\circ$. Taka jest minimalna wartość odchylenia, jaką jesteśmy w stanie rozpoznać w sytuacji, kiedy stoimy (prawie) przodem do źródła dźwięku, czyli o ile kierunek do źródła jest odchylony od kierunku na wprost.

Rozpatrzmy z kolei przypadek, gdy dźwięk dochodzi dokładnie z prawej lub lewej strony ($\alpha = \pm 90^\circ$), i jakie odchylenie od tego kierunku jesteśmy w stanie rozpoznać w tej sytuacji. Dla $\alpha = \pm 90^\circ$ różnica czasów wynosi $T = d/c \approx 650 \mu s$. Kierunek bliski $\alpha = 90^\circ$ będziemy w stanie rozpoznać, gdy różnica czasów wynosi $T - \Delta t$, czyli dla

$$\alpha_{max} = \arcsin \frac{c(T - \Delta t)}{d}.$$

Dla przyjętych danych $\alpha_{max} \approx 10^\circ$, i jest to dokładność rozpoznania kierunku dźwięku z lewej lub prawej strony, która jest znacznie gorsza niż dla dźwięków dochodzących z kierunku na wprost. Innym mechanizmem oceny kierunku jest przesunięcie fazowe sygnałów docierających do uszu oraz porównanie natężeń dźwięku odbieranego przez lewe i prawe ucho. Ale to już temat na inne zadanie.

Skrót FLRW pochodzi od nazwisk Friedman–Lemaître–Robertson–Walker.

W innych modelach, w szczególności modelach FLRW z niezerową krzywizną, odległość jasnościowa i właściwa odległość w chwili detekcji nie muszą być równe. W ogólniejszych modelach lista możliwych definicji odległości jest dłuższa niż ta podana w niniejszym artykule.

Jeżeli dysponujemy dodatkową wiedzą na temat amplitudy lub częstotliwości sygnału w chwili jego emisji, to porównując te parametry ze zmierzonymi wartościami, możemy obliczyć, ile razy zmalała amplituda sygnału lub o jaki czynnik zmieniła się częstotliwość.

W widmach promieniowania elektromagnetycznego obserwuje się charakterystyczne wzory linii emisyjnych lub absorpcyjnych, które odpowiadają przejściom pomiędzy poziomami elektronów w atomach. Częstotliwości fal emitowanych lub pochłanianych w wyniku takich przejść w atomie znamy dokładnie z doświadczeń laboratoryjnych. Widma odległych obiektów są przesunięte (najczęściej w stronę niższych częstotliwości). To przesunięcie, czyli różnicę częstotliwości, jesteśmy w stanie zmierzyć.

Jeżeli znamy mechanizm stojący za emisją sygnału, to czasami możemy dysponować dodatkową wiedzą na temat amplitudy emitowanego sygnału. Na przykład na podstawie obserwacji ustalono, że wszystkie supernowe tego typu osiągają podobną jasność maksymalną. Porównując tę wzorcową jasność ze zmierzoną jasnością, możemy obliczyć, jak zmalała amplituda fali elektromagnetycznej po drodze. Supernowe typu Ia są przykładem tzw. *świecy standardowej*, czyli obiektu, którego obserwacje wykorzystuje się do wyznaczania odległości.

Przeanalizujemy teraz, jak zmienia się amplituda i częstotliwość fali rozchodzącej się w rozszerzającym się Wszechświecie. Przyjmijmy najprostszy model FLRW z zerową krzywizną, który omówiony był w poprzednich częściach w Δ_{23}^2 i Δ_{23}^3 .

Zmiana amplitudy. Zaczijmy od przypadku statycznego (niezmieniającego się w czasie) Wszechświata o zerowej krzywiznie (czyli takiego, w którym obowiązuje zwykła euklidesowa geometria), w którym nie mamy problemu ze zdefiniowaniem odległości od źródła do odbiorcy – jest ona stała i możemy ją oznaczyć jako r . Wiadomo, że energia fali jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy, i żeby znaleźć zależność amplitudy fali od r , możemy skorzystać z zasady zachowania energii. Całkowita energia przechodząca w jednostce czasu przez powierzchnię otaczającą źródło sfery o promieniu r musi być więc stała i niezależna od r . Z drugiej strony, wraz ze wzrostem r energia ta rozkłada się na coraz większą powierzchnię równą $4\pi r^2$. Oznacza to, że *natężenie* fali (energia przechodząca w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni) maleje proporcjonalnie do $1/r^2$, a amplituda fali maleje jak $1/r$.

W rozszerzającym się Wszechświecie również obowiązuje zasada zachowania energii. Należy jednak dobrze się zastanowić, czym w tym wypadku jest odległość r . Ma to być promień sfery, na powierzchni której rozkłada się energia fali w chwili detekcji, czyli odległość typu C na naszej liście. W tym przypadku w chwili detekcji odległość od źródła do czoła sygnału jest taka sama we wszystkich kierunkach i jest właśnie odległością C. Odległość wyznaczaną z zasady zachowania energii nazywa się *odległością jasnościową* i jest ona równa odległości C w rozważanym przez nas Wszechświecie opisywanym modelem FLRW z zerową krzywizną. Oznacza to, że przyjmując taki model Wszechświata w pomiarach z wykorzystaniem świec standardowych, wyznacza się właściwą odległość, jaka dzieli nas od źródła w chwili wykonywania pomiaru (dla fal grawitacyjnych ich odpowiednikiem są tzw. *syreny standardowe*, o których więcej piszemy na marginesie na następnej stronie).

Zmiana częstotliwości. Kiedy mija nas karetka emitująca sygnał dźwiękowy, to wysokość dźwięku jest wyższa, gdy karetka się do nas zbliża niż wtedy, gdy się od nas oddala. Jest to znany ze szkoły *efekt Dopplera*. Czasami przesunięcie widm oddalających się od nas galaktyk tłumaczy się właśnie efektem Dopplera, nie do końca poprawnie. Taki efekt oczywiście występuje, ale oprócz standardowego efektu Dopplera występuje dodatkowo zmiana częstotliwości będąca skutkiem rozszerzania się przestrzeni.

Żeby lepiej zrozumieć różnicę między tymi dwoma zjawiskami, wykonajmy pewien eksperyment myślowy. Kiedy obserwujemy falę w jednym punkcie, to widzimy wahania jakiejś wielkości (np. natężenia pola elektrycznego) wokół zera