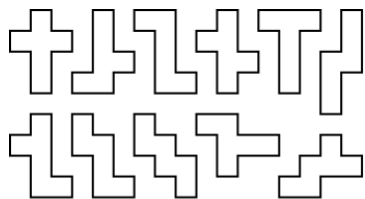
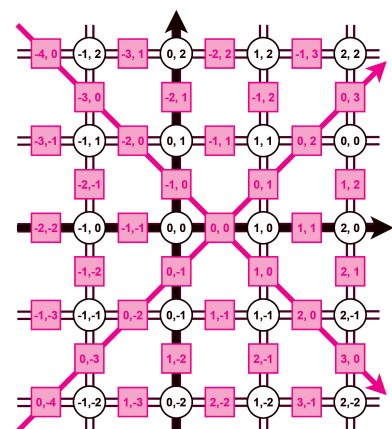


\*Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński



Komplet siatek sześciianu (kubomin)



**Rozwiązanie zadania M 1743.**  
Załóżmy, że  $m = 4n^2 + 4r + 1$  nie jest równe 1 ani nie jest liczbą pierwszą. Wówczas ma nieparzysty dzielnik pierwszy  $p = 2k + 1$  taki, że  $p \leq \sqrt{m}$ . Mamy zatem dwa przypadki:  
1)  $p < \sqrt{m}$ . Wtedy

$$n^2 + r - k(k + 1) = \frac{m - p^2}{4}$$

jest liczbą całkowitą dodatnią podzielną przez  $p$ , zatem z warunków zadania jest ona równa  $p$ . Zatem

$$n^2 + r - k(k + 1) = p = 2k + 1,$$

czyli

$$\begin{aligned} n^2 + r - (k + 1)(k + 2) &= \\ &= 2k + 1 - 2(k + 1) = -1 \end{aligned}$$

– wbrew założeniu zadania.

2)  $p = \sqrt{m}$ . Wtedy

$$4n^2 + 4r + 1 = p^2 = (2k + 1)^2,$$

skąd

$$n^2 + r - (k - 1)k = 2k$$

– sprzeczność z założeniem, o ile  $k \neq 1$ . Zatem  $k = 1$  i

$$4n^2 + 4r + 1 = 3^2 = 9.$$

W artykule *Kubomino* z  $\Delta_{22}^8$  opisałem układankę złożoną z kompletu siatek sześcianu. Wyznałem w nim, że w poszukiwaniach układu o minimalnym obwodzie posłużyłem się komputerem. Nadszedł moment, aby powiedzieć parę słów o technikach wykorzystanych w moim programie.

Obwód jest tym mniejszy, im więcej jest krawędzi wewnętrznych. Można więc próbować tak dokładać kolejne kształty, aby za każdym razem linia styku była jak najdłuższa. Oczywiście na danym etapie może być wiele „równorzędnych” możliwości, które do pewnego stopnia można sprawdzić w osobnych przebiegach rekurencji. (O tym, czy tak naiwny, zachłanny algorytm ma jakiegokolwiek szanse okazać się użytecznym, pomówimy później). Pomyślałem, że mierzenie styku będzie wygodniejsze, gdy w centrum uwagi będą krawędzie, nie wierzchołki. Doprowadziło mnie to do rozważania *kraty krawędzi*.

Nazwa zapewne brzmi dziwnie. Prawdopodobnie Czytelnicy *Delty* zwykle spotykali się dotąd tylko z „krawędziami kraty”, czyli odcinkami łączącymi sąsiednie punkty kratowe (tj. punkty o całkowitych współrzędnych). W ogóle współrzędne całkowite kojarzymy albo z punktami, albo z kwadratowymi polami, które wprowadzicie mają swoje boki, ale niekoniecznie traktujemy je jako pełnoprawne, niezależne obiekty. Otóż zaznaczając środki krawędzi kraty, łatwo się przekonać, że one również tworzą kratę, choć obróconą o  $45^\circ$  w stosunku do pól czy punktów. Ma ona także inny punkt początkowy.

Oczywiście można by przyjąć, że współrzędnymi krawędzi są współrzędne ich środków, ale chyba wygodniej operować na liczbach całkowitych. Przyjąłem, że współrzędne  $[0, 0]$  (pisane w nawiasach kwadratowych dla odróżnienia od współrzędnych punktów) odpowiadają krawędzi  $(0, 0) — (1, 0)$ . To jeszcze nie determinuje całego układu współrzędnych. Ogólnie, krawędzi wychodzącej na prawo z punktu  $(x, y)$  przypisuję współrzędne  $[x - y, x + y]$ . Z kolei krawędź wychodząca z  $(x, y)$  w dół otrzymuje współrzędne  $[x - y, x + y - 1]$ . Czytelnik Zainteresowany może samodzielnie wypisać odpowiednie wzory dla krawędzi wychodzących do góry lub na lewo. Może także poszukać wzorów przeliczających współrzędne krawędzi na współrzędne ich końców i środków (te ostatnie już nie są całkowite).

Co ciekawego ma w sobie „krata krawędzi”, czego zwyczajna nie ma?

Na przykład „zwykłych” punktów kratowych raczej nie podzieliłobyśmy na *poziome* i *pionowe*, co dla nowej kraty jest naturalne. Kryterium „poziomości” krawędzi  $[x, y]$  jest bardzo proste. Wystarczy sprawdzić, czy suma  $x + y$  jest parzysta (lub, jak kto woli:  $x \equiv y \pmod{2}$ ). Taki podział może się kojarzyć z dwubarwną szachownicą i jest to skojarzenie poniekąd właściwe.

Zwróćmy jeszcze uwagę na przedłużenia krawędzi. Niestety, wzór na współrzędne przedłużenia zależy od kierunku. Krawędź pionową  $[x, y]$  przedłużają  $[x - 1, y + 1]$  oraz  $[x + 1, y - 1]$ . W przypadku poziomej w obu współrzędnych pojawia się ten sam znak. W zasadzie można zapisać uniwersalne wzory, posługując się resztą z dzielenia, ale czy będzie to aż tak eleganckie? Zagadnienie przedłużania krawędzi pokazuje różnicę pomiędzy omawianą kratą a zwykłą szachownicą. Otóż mając czarne pole na szachownicy, trudno pośród jego czterech czarnych sąsiadów naturalnie wyróżnić dwóch „przedłużających”. Oczywiście, zważywszy na umowność współrzędnych kraty krawędzi, możemy się równie dobrze umówić, które pola szachownicy „leżą na przedłużeniu danego”, niemniej jest to pewien dodatek. Czyli krata krawędzi to trochę więcej niż szachownica.

Powróćmy do problemu znalezienia kubominowej układanki o możliwie najmniejszym obwodzie. W programie każdą figurę reprezentuję tak, aby możliwe były dwie operacje: udostępnienie zbioru wszystkich krawędzi (także tych leżących we wnętrzu figury) oraz sprawdzenie, czy podana krawędź jest wewnętrzna (nie leży na brzegu figury) i czy należy ją zaznaczyć, tzn. czy jest brzegiem któregoś elementu układanki (krawędź leżąca na brzegu zawsze się zaznacza). Taki obiekt daje się bardzo elegancko narysować (także za pomocą samych znaków ASCII), ponieważ wystarczy odwiedzić wszystkie zaznaczone krawędzie w danym zakresie współrzędnych i rysować odpowiednio skierowane kreski. Gdy posługujemy się tylko znakami, daje to ukośny rysunek, ale jest

```
#####/\### #####/\#####
#####/\:/\### ###/\:/\#####
#####/:/:/::\# #/:/:/::\#####
#####:/\:/\# #/:\:/\/\#####
###/\\:/\:/\# /\\:/\:/\#####
###/\:/\:/\:\ \:/\:/\:/\#####
#/:/:/::\:/\# #\:/\:/\:/\#####
#/::\/\:/\:/\# #\:/\:/\:/\#####
/\\:/\:/\:/\# #/:\:/\:/\:/\#
\:/\:/\:/\:/\# #\/\:/\/\:/\:/\#
#\:/\:/\:/\/\# #\:/\:/\:/\/\#
#/:/:/:/:/### #####\/\:/\:/\
#\/\:/\/\\### #####\#\:/\:/\:/
#####\:/\:/\# #####\:/\:/\#
#####\#####
```

Rysunki kubominowych układanki złożone ze znaków ASCII

\*Oczywiście najpierw dokonujemy sprawdzenia bez modyfikowania ułożonego kształtu, a wstawienia „na stałe” (m.in. zmiany krawędzi styku na krawędzie wewnętrzne) dokonujemy po upewnieniu się, że jest to możliwe i *opłacalne*.

dużo prostsze niż korzystanie ze *staroświeckich* symboli przeznaczonych do rysowania ramek. Dzięki istnieniu krawędzi jednocześnie wewnętrznych i do narysowania, można w efekcie zobaczyć całe rozwiązanie.

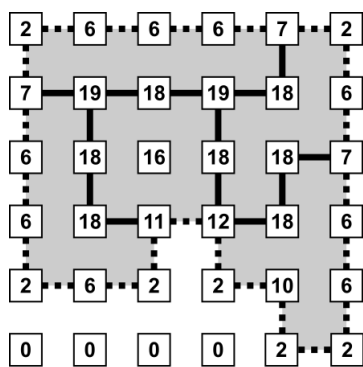
Dopasowywanie kolejnego elementu przebiega bardzo prosto. Krawędzi wewnętrznej nie możemy nałożyć na żadną inną (nie jest dozwolone także nałożenie żadnej krawędzi na dotychczasową wewnętrzną), a krawędź zewnętrzna nałożona na zewnętrzną staje się krawędzią wewnętrzną i jest doliczana do „jakości dopasowania” (im więcej krawędzi styku, tym lepiej)\*. Co warte odnotowania, podczas dopasowywania można także zweryfikować, czy krawędź styku jest w jednym kawałku (gdyby dopasowywana część stykała się z dotychczasowym układem w dwóch oddzielnych miejscach, znaczyłoby to, że gdzieś pomiędzy znajduje się pusty obszar otoczony ze wszystkich stron, co jest raczej niepożądane). Robimy to, zliczając takie krawędzie zewnętrzne dokładanej części, które same nie należąc do „starej” figury, dotykają jej swoim końcem. Chcemy mieć w sumie dokładnie dwa takie końce. No dobrze, ale jak te punkty wygodnie namierzyć? Nie posługujemy się przecież współrzędnymi punktów. Otóż wystarczy sprawdzić, czy przedłużenia krawędzi należą (nieważne, czy są wewnętrzne, czy nie) do „starej” figury!

Tutaj warto wspomnieć, że – na ile mi wiadomo – klasyczne podejście do komputerowej reprezentacji poliomin jest nieco inne i opiera się na macierzach. Kształt opisujemy wtedy za pomocą prostokątnej tablicy liczb określających, które pola należą do figury. Różne wartości mogą odróżniać od siebie oddzielne części w złożonej układance. Przy takiej reprezentacji, umieszczając nowy element na danej pozycji, sprawdzamy, czy jego pola (odpowiednio przesunięte) nie zostały zajęte wcześniej. Nie musimy porywać się na, bądź co bądź dodatkowy, test odróżniający krawędzie wewnętrzne od brzegowych. Nieco mniej naturalne okazuje się wtedy zliczanie krawędzi styku, choć oczywiście jest wykonalne.

Można stosować podejście mieszane, czyli „macierz” wyposażyć w interfejs operujący na współrzędnych krawędzi. Pomiar styku można oprzeć o taki interfejs, a samo wstawianie przeprowadzać „konwencjonalnie”. Jest to wspaniała okazja do zabawy w przeliczanie współrzędnych – tym razem współrzędne komórki przeliczamy na otaczające ją krawędzie lub z powrotem. Takie podejście zastosowałem, implementując algorytm znajdujący wypełnienie danego kształtu kubominami (oczywiście kubomina łatwo podmienić na inną kolekcję poliomin). Zasada działania była oparta na dość intuicyjnym, siłowym algorytmie (zwanym czasem *algorytmem Knutha*). Algorytm ten po kolei przegląda wolne pola obszaru i sprawdza, czy któryś z wciąż dostępnych elementów da się tak umieścić, aby pokrył rozważane pole. Gdy się to uda, wstawiamy go i kontynuujemy układanie przy pomniejszonym obszarze i zestawie części. Gdy się nie uda, usuwamy ostatnio dodany kształt i szukamy innego – może nim być także ta sama, choć inaczej położona, część.

Pomińmy jednak tę dygresję i wróćmy do zalet „reprezentacji krawędziowej”. Pozwala ona na jednoczesne wyznaczenie pewnych charakterystyk otrzymanych układów. Gdy rozważymy punkty kratowe (np. prawe końce poziomych krawędzi), każdemu z nich możemy przypisać liczbę zależną od wychodzących z niego czterech krawędzi. Przykładowo naliczajmy 1 za każdą krawędź do narysowania oraz 4 za każdą wewnętrzną. Oczywiście jeśli jedna krawędź ma obie cechy, to nadajemy jej wartość 5. W ten sposób punkty mają przypisaną sumę od 0 do 20\*\*. Licząc, ile jest punktów o danej sumie (której używamy jako indeksu zwiększanej komórki tablicy), otrzymamy zaskakująco wiele informacji. Na przykład wierzchołek figury ma przypisaną liczbę 2 (jeśli kąt jest wypukły), 10, 11 lub 12 (dla kątów wklęsłych). Punkt kratowy leżący na brzegu (niebędący wierzchołkiem) otrzyma wartość 6 lub 7. Sumując odpowiednie liczby punktów, otrzymamy obwód figury (punktów kratowych na brzegu jest tyle samo co łączących je, jednostkowych krawędzi).

Z podanych „statystyk” można bez trudu wyłuskać liczbę czwórstyków (wspólnych wierzchołków 4 części) i trójstyków oraz odróżnić te, które leżą na brzegu od tych wewnętrznych. Można nawet obliczyć pole powierzchni, choć

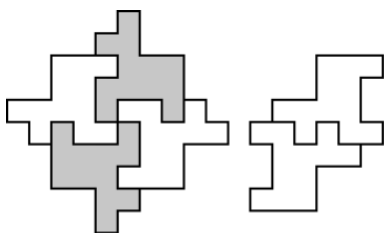


Przykład układanki (z tetromin) oraz sum w poszczególnych wierzchołkach kraty

\*\*Nie każda wartość sumy może wystąpić, przynajmniej jeśli rozważana „figura” spełnia zdroworoządkowe założenia.

Czytelnika Zainteresowanego tworzeniem algorytmów operujących na zbiorach krawędzi kraty muszą dodatkowo ostrzec przed pewnymi subtelnosciami związanymi ze stosowaniem geometrycznych przekształceń. Zwykle przesunięcia o wektor (których przy układaniu nie da się uniknąć) skrywają niespodzianki, ponieważ jeśli  $\Delta x + \Delta y$  jest nieparzyste, po przesunięciu o wektor  $[\Delta x, \Delta y]$  krawędzie pionowe przejdą na poziome, co jest dalece niewłaściwe. Na podobne „trudności” należy uważać przy obrotach i odbiciach symetrycznych.

W poprzednim artykule o kubominie,  $\Delta_{22}^8$ , naszkicowałem dowód faktu, że obwód 36 jest minimalny.



Przykład zestawu części (4 identyczne), których „zachłanne” układanie nie pozwala uzyskać minimalnego obwodu

Poliomino nazywamy *wypukłym*, gdy każdy jego wiersz i kolumna są „w jednym kawałku”. Nie należy tego mylić z klasycznym pojęciem wypukłości występującym w geometrii.

w przypadku programu układającego kubomino nie było to do niczego potrzebne (pole jest zawsze takie samo). Niestety, przedstawione *bezmysłne* obliczenia nie pozwalają wyznaczyć maksymalnej długości prostej krawędzi.

Teraz może odsunąć kraty na bok i pochylmy się nad strategią poszukiwania kształtów minimalizujących obwód. Wspomniałem, że przy dopasowywaniu części można, wykorzystując wielokrotne wywołania rekurencyjne, sprawdzić kilka optymalnych położenia konkretnego elementu (sprawdzenie wszystkich jest dalece nierealne; Czytelnik Zaprawiony w Szacowaniach może zastanowić się, jak wielka jest liczba możliwych układów). Alternatywnie, można wykorzystać te wywołania do sprawdzania różnych kolejności dodawania elementów (11! to dla komputera nie aż tak dużo), a wybór pomiędzy „równorzędnymi” ustawieniami danej części uczynić losowym. Gdy testowałem oba podejścia, to właśnie ta druga wersja programu znacznie częściej układała z kubomin coś o małym obwodzie.

Zachłanny i randomizowany algorytm poszukujący minimalnego obwodu zdołał wypełnić swoje zadanie, ponieważ znalazł układ o obwodzie 36. Po dłuższym czasie wyprodukował jeszcze trzy inne tego typu rozwiązania. Niemniej tutaj pojawiają się pytania teoretyczne: czy musiało mu się to udać?

Można znaleźć takie zestawy części, których obwodu nie da się zminimalizować poprzez dokładanie każdego kolejnego elementu tak, aby osiągnąć najdłuższy możliwy styk. W przykładzie zamieszczonym na marginesie ułożenie symetryczne daje łączną długość styków równą 24 (obwód 40). Gdy jednak zechcemy wykorzystać maksymalny styk pomiędzy dwoma elementami (ma długość 7), to osiągnięcie takiego rezultatu nie będzie możliwe. Zachęcam Czytelnika do poszukania własnego przykładu – może uda się znaleźć taki złożony z zaledwie 3 części lub taki, dla którego łatwiej zauważyć pożądane własności?

Może siatki sześciannu mają jakąś własność, która gwarantuje osiągalność minimalnego obwodu przy zachłannej strategii? W oczy rzuca się fakt, że wszystkie one są wypukłymi poliominami. Czy ma to jakiś związek ze skutecznością algorytmu? Pytanie to może być bardzo trudne, ale Nauce to nie powinno przeszkadzać.

## Rozwiązania zadań do artykułu „Oblicza dualności” ze strony 1

1. Rozważmy dwa ostrosłupy prawidłowe o wierzchołkach  $P, Q$  sklejone wspólną podstawą  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ . Jeśli punkt  $A_1$  zamienimy na jakiś pobliski punkt  $A'_1$  poza płaszczyzną podstawy, to w otrzymanym wielościanie wypukłym  $A'_1 A_2 A_3 A_4 A_5 P Q$  środki odcinków  $A'_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A'_1$  nie leżą w jednej płaszczyźnie. W konsekwencji również środki ścian łączących te odcinki z  $P$  nie tworzą płaszczyzny.

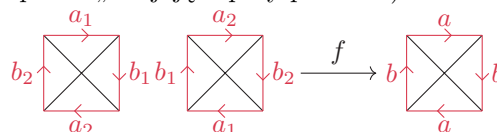
2. Czworoscian:  $4 - 6 + 4 = 2$ . Sześciąt:  $8 - 12 + 6 = 2$ . Ośmiościan:  $6 - 12 + 8 = 2$ . Dwunastościan:  $20 - 30 + 12 = 2$ . Dwudziestościan:  $12 - 30 + 20 = 2$ .

3. Wspomniany dowód w ukryty sposób korzysta z twierdzenia Jordana, które mówi rzecz następującą: w grafie na sferze dowolny cykl prosty rozcina sferę na dwie części. Podobne stwierdzenie nie jest prawdziwe na torusie.

4.  $k = 2$ : Każda ściana (dwuwymiarowa) należy do dokładnie dwóch czworoscianów.  $k = 1$ : Każda krawędź należy do pewnej liczby czworoscianów kolejno połączonych ścianami. (Warunek dla wierzchołka trudno jest sformułować w podobny sposób).

5. Kolejne równości otrzymujemy, ustalając  $B$  odpowiedniego wymiaru (1, 2, 3) i odnotowując, że:  
– każda krawędź ma dwa końce;  
– każdy trójkąt ma tyle samo wierzchołków co krawędzi (czyli 3);  
– charakterystyka Eulera brzegu czworoscianu to  $4 - 6 + 4 = 2$ ;  
a następnie sumując po wszystkich  $B$ .

6\*. Poniżej lewy diagram przedstawia sferę  $\mathbb{S}$  (w sposób nawiązujący do zszywania poszewki na poduszkę), a prawy płaszczyznę rzutową  $\mathbb{P}$ . Funkcja  $f$  posyła każdy z punktów  $\mathbb{S}$  na odpowiedni punkt  $\mathbb{P}$  przez przesunięcie (w ten sposób „sklejając” pary punktów).



Jeśli teraz na  $\mathbb{P}$  mielibyśmy daną *dowolną* siatkę, to biorąc przeciwobrazy jej  $V$  wierzchołków przy funkcji  $f$ , uzyskalibyśmy  $2V$  wierzchołków na  $\mathbb{S}$ ; czyniąc podobnie dla krawędzi i ścian, otrzymalibyśmy siatkę na  $\mathbb{S}$  o żądanej własności.