KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 51

Wszystko w porządku

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nazywamy *zgodnie uporządkowanymi*, jeśli

$$\text{nie istnieją takie } i, j \leqslant n, \text{ że } a_i < a_j \text{ oraz } b_i > b_j.$$

Oznacza to, że ciągi (a) i (b) mają na tym samym miejscu największą liczbę, na tym samym drugą co do wielkości, trzecią i tak dalej aż do ostatniej. W analogiczny sposób definiujemy ciągi *przeciwnie uporządkowane*. Spełniają one warunek: nie istnieją takie $i, j \leqslant n$, że $a_i < a_j$ oraz $b_j < b_j$.

Można się przekonać, że ciągi spełniające prostszy warunek: $a_i \geqslant a_j \iff b_i \geqslant b_j$ zawsze są dobrze uporządkowane. W przypadku ciągów różnowartościowych ten warunek jest równoważny przedstawionej definicji.

Na potrzeby niniejszego artykułu będziemy stosować oznaczenie

$$(a) \star (b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Interesuje nas wartość wyrażenia $(a) \star (b')$, w którym $(b') = (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(n)})$ dla pewnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Twierdzenie 1 (o ciągach zgodnie uporządkowanych). *Przy powyższych założeniach wartość wyrażenia $(a) \star (b')$ jest największa wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi (a) i (b') są zgodnie uporządkowane.*

Dowód. Jeżeli ciągi (a) i (b') nie są zgodnie uporządkowane, to istnieją takie $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, że $a_i < a_j$ oraz $b'_i > b'_j$. Jeśli zamienimy w ciągu (b') wyrazy b'_i i b'_j miejscami, to wartość wyrażenia $(a) \star (b')$ wzrośnie o

$$a_i b'_j + a_j b'_i - a_i b'_i - a_j b'_j = (a_j - a_i)(b'_i - b'_j) > 0.$$

Ponieważ permutacji σ jest skończenie wiele, wynika z tego, że maksimum wyrażenia $(a) \star (b')$ istnieje i jest osiągane dla pewnego ciągu (b') zgodnie uporządkowanego z (a). W drugą stronę, jeśli $(b'') = (b_{\tau(1)}, b_{\tau(2)}, \ldots, b_{\tau(n)})$ również jest ciągiem zgodnie uporządkowanym z (a), to $(b') = (b'')$ (choć niekoniecznie $\tau = \sigma$), więc wartość $(a) \star (b')$ jest taka sama dla wszystkich (b') zgodnie uporządkowanych z (a).

W analogiczny sposób można udowodnić

Twierdzenie 2 (o ciągach przeciwnie uporządkowanych). *Przy powyższych założeniach wartość wyrażenia $(a) \star (b')$ jest najmniejsza, gdy ciągi (a) i (b') są przeciwnie uporządkowane.*

W polskiej literaturze często można napotkać inną pisownię nazwiska Pafnutija Lwowicza Czebyszowa („Czebyszew"). Na poniższym znaczku pocztowym wyraźnie widać dwie kropki nad „E", co oznacza samogłoskę „jo", którą po spółgłoskach szeleszczących czyta się „o". Wymowa „Czebyszew" wzięła się stąd, że przy tłumaczeniu z języka rosyjskiego te dwie kropki często znikają, a i sami Rosjanie rzadko je rysują, bo, podobnie jak w przypadku wymowy „o" i „a", wiedzą, gdzie stawia się akcenty. Co jest zatem silniejsze – zakorzeniony w tradycji „Czebyszew" czy prawidłowy – przynajmniej w języku rosyjskim – „Czebyszow"?

Z powyższymi nierównościami wiąże się bezpośrednio

Nierówność Czebyszowa. Dla ciągów (a) i (b) zgodnie uporządkowanych mamy:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Jeśli ciągi (a) i (b) są uporządkowane przeciwnie, to nierówność zachodzi w drugą stronę.

Dowód. Z twierdzenia 1 wynika, że

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geqslant a_1 b_{1+k} + a_2 b_{2+k} + \ldots + a_n b_{n+k} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, n,$$

przy czym przyjmujemy $b_j = b_{j-n}$ dla $j > n$. Sumując powyższe nierówności, a następnie dzieląc obie strony przez n^2, otrzymamy tezę. Dowód dla ciągów przeciwnie uporządkowanych jest analogiczny.

Zadania

1. Udowodnić, że $a + b + c \leqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$ dla $a, b, c > 0$.
2. Wykazać, że $a^a b^b c^c \geqslant a^b b^c c^a$ dla $a, b, c > 0$.
3. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, a α, β, γ miarami kątów (wyrażonymi w stopniach) naprzeciw nich. Wykazać, że $a\alpha + b\beta + c\gamma \geqslant 60^\circ \cdot (a + b + c)$.
4. Dowieść, że $x_1^{m+k} + x_2^{m+k} + \ldots + x_n^{m+k} \geqslant x_1^m x_2^k + x_2^m x_3^k + \ldots + x_{n-1}^m x_n^k + x_n^m x_1^k$ dla liczb całkowitych dodatnich k i m oraz rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$.
5. Udowodnić, że $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$ dla $a, b, c > 0$ (nierówność Nesbitta).
6. Udowodnić, że $\frac{x_1}{s-x_1} + \frac{x_2}{s-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{s-x_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$ dla liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$, przy czym $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Wskazówki do zadań

1. Ciągi (a^2, b^2, c^2) i $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ są przeciwnie uporządkowane.
2. Po obustronnym zlogarytmowaniu wystarczy zastosować twierdzenie 1.
3. W trójkącie największy kąt leży naprzeciw najdłuższego boku, a najmniejszy – naprzeciw najkrótszego.
4. Jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, to każdy ciąg postaci $(x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a)$ dla $a > 0$ jest uporządkowany zgodnie z ciągiem (x).
5. Ciągi (a, b, c) i $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ są zgodnie uporządkowane.
6. Poprzednie zadanie jest szczególnym przypadkiem tego.