Permutacje i kostka Rubika

Karol GRYSZKA, Adrian KOŁCZ***

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
** Student Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Kostka Rubika jest niezwykle popularną łamigłówką, zagościła także na łamach *Delty* (np. w artykule *Kostka Rubika – wspomnienia z dawnych lat* z Δ^5_{11}; tam też Autorzy pokazali metodę jej układania). W tym artykule zajmiemy się jednym z matematycznych sposobów opisu kostki oraz jego konsekwencjami.
W kostce Rubika dokonuje się mieszania jej elementów, dlatego naturalnym narzędziem do jej opisu są **permutacje**. Przypomnijmy – permutacja zbioru n-elementowego to dowolny n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Inaczej, jest to bijekcja σ pewnego skończonego zbioru S w siebie. Jeśli permutujemy litery A, B, C, D, **postacią macierzową** permutacji σ jest

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \sigma(A) & \sigma(B) & \sigma(C) & \sigma(D) \end{pmatrix}, \quad \text{na przykład} \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}.$$

Permutacja σ jest cyklem, o ile istnieje taki zbiór $S_c = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset S$, że $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, …, $\sigma(a_{k-1}) = a_k$ i $\sigma(a_k) = a_1$ oraz $\sigma(a) = a$ dla $a \in S \setminus S_c$.

Specjalnym rodzajem permutacji są **cykle**, czyli takie permutacje, w których pewne elementy nie ruszają się, pozostałe zaś wymieniają się między sobą… cóż, cyklicznie (na marginesie podajemy formalną definicję cyklu). Podana wcześniej permutacja nie jest cyklem, ale

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix}$$

nim jest i zapisywana jest krótko jako $(B\ C\ D)$. W tym zapisie każda kolejna litera przechodzi na następną, to jest $\sigma(B) = C$, $\sigma(C) = D$ oraz $\sigma(D) = B$. Wśród permutacji wyróżniamy jeszcze tak zwaną **permutację identycznościową** I, czyli taką permutację, że $I(a) = a$ dla każdego $a \in S$.

Każda permutacja posiada swój **rząd**, który jest definiowany jako minimalna liczba powtórzeń tej permutacji prowadząca do permutacji identycznościowej. Na przykład cykl $(A\ B\ C)$ ma rząd równy 3, gdyż

$$(A\ B\ C) \circ (A\ B\ C) \circ (A\ B\ C) = I\ .$$

Symbolem $\circ$ oznaczamy składanie permutacji (permutacje to funkcje, a te potrafimy składać). Z definicji cyklu wynika, że jego rząd jest równy liczbie jego elementów. Fakt ten będziemy wykorzystywać wielokrotnie w obliczeniach.

Każdą permutację można rozłożyć na iloczyn cykli **rozłącznych** (czyli takich, które nie zawierają wspólnych elementów). Na przykład

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J \\ B & I & A & F & D & E & C & J & G & H \end{pmatrix} = \big(A\ B\ I\ G\ C\big) \circ \big(D\ F\ E\big) \circ \big(H\ J\big)\,.$$

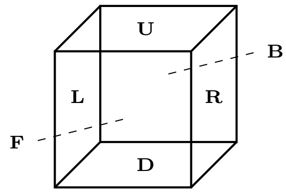
Znając rozkład permutacji na cykle rozłączne, jesteśmy w stanie znacznie łatwiej obliczyć jej rząd. Wystarczy w tym celu obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność rzędów z rozkładu. Cykle z powyższego rozkładu są odpowiednio rzędu 5, 3 i 2, stąd cała permutacja jest rzędu $\mathrm{NWW}(5, 3, 2) = 30$.

Rozwiązanie zadania M 1738.
Odpowiedź: 120.
Łącznie jest 210 sum, czyli po 105 każdego znaku. Oznaczmy przez x liczbę liczb dodatnich, a przez y liczbę liczb ujemnych. Zminimalizujemy liczbę ujemnych iloczynów xy. Przy ustalonej sumie, iloczyn liczb jest tym mniejszy, im bardziej są od siebie oddalone. Żadna z liczb x i y nie może być większa niż 15 (w przeciwnym razie liczba sum odpowiedniego znaku będzie większa niż $(15 \cdot 14)/2 = 105$), więc optymalny wynik będzie przy $x = 15$, $y = 6$ (lub odwrotnie). W takim przypadku liczba ujemnych iloczynów wynosi 90, co dowodzi, że nie możemy uzyskać więcej niż 120 dodatnich iloczynów.
Z drugiej strony, taką liczbę osiągniemy, biorąc na przykład piętnaście liczb równych 1, a sześć równych -2.

Kostka Rubika. W tej części artykułu zostawimy na chwilę wątek permutacji i opowiemy o kostce Rubika. Zmiana ta jest uzasadniona, gdyż naszym dalszym celem będzie zapisanie ruchów na kostce w języku specjalnych permutacji.

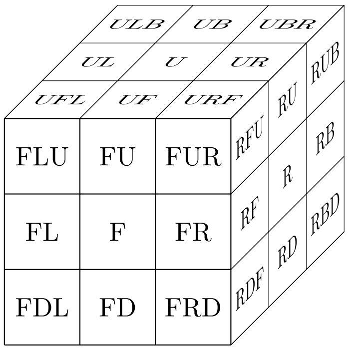
Ernő Rubik (ur. 13 lipca 1944 w Budapeszcie) – węgierski architekt i rzeźbiarz. Ciekawostką jest fakt, że wynalazca kostki po raz pierwszy układał ją przez miesiąc.

Kostka Rubika została wynaleziona przez Ernő Rubika w 1974 roku, do Polski trafiła w 1982 roku. Jest to łamigłówka w kształcie sześcianu $3 \times 3 \times 3$, w której zadaniem jest takie ułożenie mniejszych kosteczek, aby układ tworzył 6 ścian jednolitego koloru (w standardowym układzie barw: biały, żółty, zielony, niebieski, czerwony i pomarańczowy). Dwukolorowe kosteczki nazywać będziemy **krawędziami**, a trójkolorowe kosteczki – **rogami**. Nieruchome względem siebie jednokolorowe elementy nazywamy **środkami**.



Up, **D**own, **L**eft, **R**ight, **F**ront i **B**ack.

Wprowadzimy teraz pewne oznaczenia. Zaczniemy od przypisania ścianom liter jak na rysunku na marginesie: **U**, **D**, **L**, **R**, **F**, **B**. Oznaczenia te są zgodne z pierwszymi literami angielskich nazw ścian. Dana litera będzie również oznaczać obrót odpowiadającą jej ścianą o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara (a więc **F** oznacza ruch przednią ścianą o kąt prosty w prawo). Ponadto wprowadzamy dodatkowe oznaczenia. Jeżeli obok litery ustawimy znak $'$, obrót wykonujemy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (na przykład $\mathbf{R}'$ oznacza obrót prawej ściany o 90° w kierunku **przeciwnym** do ruchu wskazówek zegara). Zwyczajowo obrót danej ściany o 180° oznacza się przez dodanie dwójki



Opis pól narożnych moglibyśmy ujednoznacznić np. poprzez ustalenie, że kolejne litery czytamy zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół narożnika (a więc mamy pole FUR, ale również pola FLU, FDL i FRD – cztery pola na przedniej ścianie).

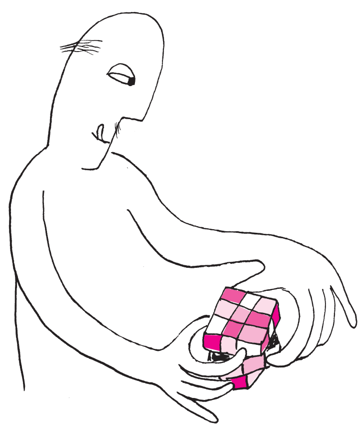
po jej nazwie (np. **R**2). Dla uproszczenia zapisu będziemy stosować notację potęgową na powtarzające się ruchy lub całe sekwencje, na przykład sekwencja **RU** powtórzona 6 razy może zostać zapisana jako $(\mathbf{RU})^6$. Zaznaczmy ponadto, że sekwencje wykonujemy w kolejności, w jakiej je czytamy – od lewej do prawej.

Permutacje i kostka Rubika. Na potrzeby dalszej części tekstu przyda nam się nazwać konkretne pola występujące na ścianach kostki Rubika (każda ma ich dziewięć). Nazwy będą jedno-, dwu- lub trzyliterowe, przy czym pierwsza litera będzie nazwą ściany, na której dane pole się znajduje. Kolejne litery to nazwy wszystkich ścian, z którymi dane pole sąsiaduje (o ile nie mamy do czynienia z polem centralnym). Przyjmijmy ponadto, że pola narożne mają dwie różne, pełnoprawne nazwy (np. FUR i FRU). Dla odróżnienia od nazw ruchów i ich układów, nazwy pól nie będą wykorzystywały pogrubionej czcionki.

Każdy z opisanych wcześniej ruchów odpowiada pewnej permutacji pól. Przedstawienie tej permutacji jako złożenia rozłącznych cykli nazwiemy **postacią rozszerzoną** danego ruchu. Pomimo takiej nazwy pozwolimy sobie na pewien skrót. Zauważmy, że jeśli pole XY przechodzi na pole PQ, to pole YX musi przejść na pole QP. Podobnie, jeśli XYZ przechodzi na PQR, to YZX i ZXY przechodzą na QRP i RPQ. Zatem cykle pól o dwuliterowych nazwach moglibyśmy połączyć w pary, a cykle pól o trójliterowych nazwach – w trójki. Dla zwiększenia czytelności będziemy wybierać z nich po jednym reprezentancie. Dla przykładu rozważmy R. Obrót ten w postaci rozszerzonej prezentuje się następująco:

(FRU URB BRD DRF) (FR UR BR DR).

W powyższym zapisie celowo pominęliśmy zatem cykl (RF, RU, RB, RD) oraz (RUF, RBU, RDB, RFD) i (UFR, BUR, DBR, FDR). Z postaci rozszerzonej natychmiast wynika, że jest to permutacja rzędu $\mathrm{NWW}(4,4) = 4$, co nas nie zaskakuje – czterokrotne wykonanie **R** faktycznie powoduje powrót do konfiguracji wyjściowej.



Zobaczmy to na jeszcze innym przykładzie – sekwencji **RU**. Postać rozszerzona tych dwóch obrotów prezentuje się następująco:

(FR UF UL UB UR BR DR) (FUR URF RFU)
(FUL LUB BUR DBR FDR ULF UBL URB BRD DRF LFU BLU RBU RDB DFB).

Zgodnie z wiadomościami z pierwszej części, rząd takiej permutacji jest równy $\mathrm{NWW}(7,3,15) = 105$. Cierpliwy Czytelnik posiadający kostkę Rubika może sprawdzić na ułożonej kostce, że wykonanie sekwencji **RU** 105 razy przywraca ją do pozycji pierwotnej.

Załóżmy, że ruch Ψ ma rząd N. Wtedy zaczynając od ułożonej kostki i powtarzając na niej ruch Ψ, dojdziemy do ułożonej kostki dopiero po N ruchach. Jeśli nie wyczerpaliśmy w ten sposób wszystkich ustawień, możemy rozważyć takie, którego jeszcze nie zaobserwowaliśmy, i to na nim wykonywać ruch Ψ – dostaniemy kolejnych N ustawień, różnych od poprzednich. Kontynuujemy tę procedurę, dopóki nie wygenerujemy w ten sposób wszystkich ustawień – za każdym razem powiększamy grono zaobserwowanych o N nowych, w związku z czym N musi być dzielnikiem liczby wszystkich ustawień.

Bazując na powyższych przykładach, możemy zadać pytanie o istnienie konkretnego rzędu permutacji występującego na kostce. Można uzasadnić, że potencjalne rzędy muszą być dzielnikami liczby wszystkich możliwych układów (skrótowe wytłumaczenie na marginesie obok). Wyznaczenie tej liczby nie jest zupełnie trywialne, nie jest też jednak ekstremalnie trudne. Okazuje się, że wszystkich możliwych ustawień kostki jest

$$43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11,$$

czyli ponad 43 tryliony możliwości. Chociaż każdy potencjalny rząd musi być dzielnikiem powyższej liczby, zależność odwrotna nie jest prawdziwa – nie każdy dzielnik jest rzędem pewnego elementu. Okazuje się jednak, że dzielniki pierwsze mają tę własność, co jest treścią wywodzącego się z teorii grup twierdzenia Cauchy'ego, które w pełnym brzmieniu przytaczamy poniżej:

Grupą nazywamy zbiór G, w którym określone dwuargumentowe działanie $* : G \times G \to G$ jest łączne, posiada element neutralny e i każdy element x posiada taki element $\bar{x}$ (nazywany odwrotnym), że $x * \bar{x} = \bar{x} * x = e$. Więcej o grupach można przeczytać w artykule Joachima Jelisiejewa z Δ^4_{19}.

Twierdzenie Cauchy'ego. *Jeżeli G jest skończoną grupą z działaniem $*$ i p jest liczbą pierwszą będącą dzielnikiem rzędu grupy G, to w G istnieje element rzędu p. Oznacza to, że istnieje $x \in G$ taki, że $x^p := \underbrace{x * \cdots * x}_{p} = e$ oraz $x^k \neq e$ dla $k < p$.*

Ruchy wykonywane na kostce Rubika tworzą grupę, zatem zasadne jest korzystanie z powyższego twierdzenia, które prowadzi nas do następującego wniosku:

Wniosek. Na kostce Rubika istnieją permutacje rzędu $2, 3, 5, 7, 11$.

Wskażemy teraz przykłady takich permutacji, oczywiście są one jednymi z wielu możliwych występujących na kostce.

Permutacją rzędu 2 jest na przykład obrót dowolnej ściany o 180°. Ponieważ rząd **RU** jest równy 105, rzędy permutacji $(\mathbf{RU})^{35}$, $(\mathbf{RU})^{21}$, $(\mathbf{RU})^{15}$ są odpowiednio równe 3, 5, 7. Permutacją rzędu 7 jest również permutacja $\mathbf{RU'F'U}$. Permutacja $\mathbf{RL'F'U}$ jest rzędu 33, zatem permutacja $(\mathbf{RL'F'U})^3$ jest rzędu 11, a permutacja $(\mathbf{RL'F'U})^{11}$ jest rzędu 3.

Znana jest pełna lista możliwych rzędów sekwencji na kostce Rubika. W kolejności od najrzadszych do najpopularniejszych (w sensie liczby permutacji o danym rzędzie) są to: 1, 11, 2, 3, 5, 7, 22, 4, 55, 110, 80, 15, 33, 14, 21, 1260, 9, 10, 35, 280, 28, 315, 44, 99, 720, 112, 6, 16, 495, 990, 77, 154, 45, 20, 165, 330, 140, 105, 504, 840, 336, 63, 8, 70, 231, 462, 630, 66; 240, 126, 18, 360, 132, 56, 252, 144, 42, 198, 48, 420, 168, 40, 210, 72, 84, 90, 120 30, 12, 180, 36, 24, 60.

Przyglądając się powyższemu ciągowi liczb, możemy dostrzec, że największym rzędem permutacji jest 1260.

Jedną z wielu permutacji o takim rzędzie jest $(\mathbf{R}\ \mathbf{F}2\ \mathbf{B'}\ \mathbf{U}\ \mathbf{B'})$. Permutacja w postaci rozszerzonej prezentuje się następująco:

(FU FD LU BR DR FL FR) (RU LB UR BL) (UB DB)
(FRU DLB BRD RBU LUB UFR BDL DBR URB BLU
RUF LBD RDB BUR UBL)
(LFU RFD LDF FUL FDR DFL ULF DRF FLD).

Rzędy cykli są odpowiednio równe: 7, 4, 2, 15, 9, zatem rząd permutacji jest faktycznie równy $\mathrm{NWW}(7, 4, 2, 15, 9) = 1260$. Nie jest to oczywiście jedyna permutacja o takim rzędzie – jest ich w ogólności dokładnie 51 490 480 088 678 400 (z drugiej strony jest to permutacja o takim rzędzie wymagająca najmniejszej liczby ruchów w sekwencji). Innym przykładem jest $(\mathbf{U}\ \mathbf{F'}\ \mathbf{U'}\ \mathbf{D}2\ \mathbf{U}2\ \mathbf{R'})$; zachęcamy Czytelnika do sprawdzenia tego faktu (oczywiście w sposób teoretyczny, a nie empiryczny!).

Powyższe rozważania pokazują, że odpowiedni opis matematyczny pozwala czasem na wysnucie wniosków, które trudno jest uzyskać na drodze czysto doświadczalnej. O ile wyznaczenie rzędu przez postać rozszerzoną okazało się bardzo proste, to wykonanie algorytmu 1260 razy może być bardzo uciążliwe, a jeden błąd może całkowicie zniweczyć „ręczne” sprawdzenie rzędu. Zauważmy jednocześnie, że z artykułu wiemy również, że dowolna sekwencja ruchów powtarzana dostatecznie wiele razy w końcu przywróci kostkę do pozycji ułożonej, choćby nie wiadomo jak bardzo „trudna” była to sekwencja.

Mamy nadzieję, że po przeczytaniu tego artykułu kostka Rubika skrywa nieco mniej tajemnic, niemniej jest to w dalszym ciągu bardzo obszerny temat, do którego zgłębiania mocno zachęcamy.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1738. Danych jest 21 niezerowych liczb. Dla każdej pary liczb obliczano ich sumę oraz iloczyn. Okazało się, że połowa wszystkich sum jest dodatnia, a połowa ujemna. Jaka jest największa możliwa liczba dodatnich iloczynów?
Rozwiązanie na str. 1

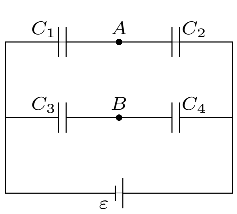
M 1739. Cięciwy AB i CD okręgu Ω przecinają się w punkcie E tak, że $AD = AE = EB$. Niech F będzie punktem na odcinku CE takim, że $ED = CF$. Dwusieczna kąta AFC przecina łuk DAC okręgu Ω w punkcie P. Udowodnić, że punkty A, E, F i P leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie na str. 6

M 1740. Dana jest liczba całkowita dodatnia n, która jest równa sumie $k \geqslant 3$ swoich dzielników (parami różnych). Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n. Uzasadnić, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+k-1} \geqslant 1.$$

Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER



F 1067. Jaki warunek muszą spełniać pojemności C_1, C_2, C_3 i C_4 w obwodzie przedstawionym na rysunku, żeby napięcie między punktami A i B wynosiło $U_{AB} = 0$?
Rozwiązanie na str. 11

F 1068. Długi, cienki, poziomy przewód jest równomiernie naładowany ładunkiem λ na jednostkę długości. Przewód znajduje się na wysokości h nad powierzchnią ziemi. Ile wynosi powierzchniowa gęstość ładunku, σ, na powierzchni ziemi w odległości x od prostej otrzymanej jako pionowy rzut przewodu na powierzchnię ziemi?
Wskazówka: powierzchnię ziemi należy traktować jak powierzchnię przewodnika.
Rozwiązanie na str. 12