

Modele Wszechświata dla początkujących

Część 3: Mrówki w punkcie przegięcia

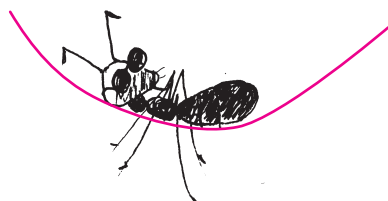
Szymon CHARZYŃSKI*

*Katedra Metod Matematycznych Fizyki,
Wydział Fizyki Uniwersytetu
Warszawskiego

Przypominamy równania Einsteina
omówione w poprzedniej części:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{geometria}} + \Lambda g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}_{\text{materia}}$$

Część *geometria* stanowi matematyczny opis mierzenia odległości, upływu czasu i zakrzywienia czasoprzestrzeni. Po prawej stronie mamy część podpisaną *materia*, czyli matematyczny opis rozkładu materii i energii w czasoprzestrzeni razem z oddziaływaniami innymi niż grawitacyjne. Znaczeniem niepodpisanego członu, w którym występuje stała Λ zwana *stałą kosmologiczną*, zajmiemy się w tym artykule.



O ciemnej materii pisaliśmy w *Delcie* wielokrotnie. Polecamy między innymi artykuły Klaudii Kowalczyk (Δ_{18}^3) Macieja Bilickiego (Δ_{18}^{12}) i Wojciecha Hellwina (Δ_{19}^7 i Δ_{19}^8).

W poprzednim numerze omówiliśmy listę założeń, jakie przyjmuje się przy konstruowaniu modeli Wszechświata. W wielkim skrócie można je podsumować stwierdzeniem, że całą geometrię czasoprzestrzeni opisuje się tylko jedną funkcją czasu, oznaczaną $a(t)$, czyli tzw. *funkcją skali*, spełniającą równanie Friedmana:

$$(1) \quad \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{c^2}{3}\Lambda,$$

które otrzymuje się z równań Einsteina w wyniku odpowiedniego podstawienia. Zajmiemy się teraz analizą parametrów występujących w tym równaniu, a następnie własnościami rozwiązań dla różnych kombinacji wartości tych parametrów.

Parametry modeli kosmologicznych. Czas, który jest „teraz”, tradycyjnie oznacza się przez t_0 i przyjmuje się, że $a(t_0) = 1$. Aktualną wartość parametru Hubble’a oznacza się przez H_0 , czyli $H_0 = H(t_0)$. Możemy też oznaczyć aktualną wartość średniej gęstości materii we Wszechświecie przez $\rho_0 = \rho(t_0)$. Wstawiając do równania (1) $t = t_0$, otrzymujemy równanie wiążące występujące w nim parametry:

$$(2) \quad H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{c^2}{3}\Lambda.$$

Gdyby $\Lambda = 0$, to powyższe równanie wyrażałoby ścisły związek pomiędzy aktualnymi wartościami parametru Hubble’a i średniej gęstości materii. Istnienie takiego jednoznacznego związku jest konsekwencją przyjętego przez nas założenia, że krzywizna przestrzeni jest równa zero (dlatego nie ma w tym równaniu członu związanego z krzywizną). Tradycyjnie wartość gęstości, która spełnia to równanie dla $\Lambda = 0$, nazywa się *gęstością krytyczną* i oznacza ρ_c . Jak łatwo obliczyć (wstawiając $\Lambda = 0$ do równania (2)), $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. Dzieliąc równanie (2) przez H_0^2 i wykorzystując wprowadzone oznaczenie ρ_c , otrzymujemy:

$$1 = \frac{\rho_0}{\rho_c} + \frac{c^2\Lambda}{3H_0^2}.$$

Mamy dwie bezwymiarowe stałe sumujące się do 1. Standardowo oznacza się je $\Omega_m = \frac{\rho_0}{\rho_c}$ oraz $\Omega_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{3H_0^2}$. Pierwsza z nich opisuje materię. Nie robiliśmy tutaj rozróżnienia między materią barionową (taką, z której jesteśmy zbudowani) i tzw. *ciemną materią*, czyli naszą stałą Ω_m uwzględnia oba rodzaje materii. Czasami rozdziela się wkład od obu tych rodzajów materii i zamiast jednego parametru Ω_m występują dwa parametry: Ω_b (materia barionowa) i Ω_c (ciemna materia). Jeżeli model uwzględnia promieniowanie (i jego ciśnienie), to pojawia się także parametr Ω_r . Uwzględnienie promieniowania jest istotne wtedy, kiedy chcemy opisywać wczesny, gorący Wszechświat. Gdybyśmy dopuszczali niezerową krzywiznę, to występowałby parametr za nią odpowiedzialny – Ω_k . Możemy więc mieć więcej sumujących się do 1 parametrów odpowiadających za różne „składniki” Wszechświata. My zostaniemy przy prostym przypadku z dwoma parametrami: $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, który z jednej strony stosunkowo łatwo jest rozwiązać, a z drugiej dobrze opisuje ewolucję Wszechświata od czasów, kiedy jego wiek wynosił około kilka milionów lat, do teraz.

Zmiana gęstości w czasie. Przyjeliśmy, że aktualna (w chwili t_0) wartość gęstości to $\rho(t_0) = \rho_0$. Żeby obliczyć, jak zmienia się gęstość w czasie, zauważmy, że objętość zmienia się proporcjonalnie do $a(t)^3$, bo funkcja $a(t)$ mówi nam, jak skalują się wszystkie długości. Ponieważ gęstość to masa podzielona przez objętość, więc jeżeli chcemy, aby masa zawarta w jakiejś części Wszechświata się nie zmieniała wraz z jego rozszerzaniem, to gęstość musi się zmieniać

według równania $\rho(t) = \rho_0/a(t)^3$. Zgodnie z naszą intuicją, gdy Wszechświat puchnie, to jego gęstość maleje – i dokładnie taką zależność gęstości od czasu dostajemy dla pyłu (czyli materii, która oddziałuje tylko grawitacyjnie). Równanie (1) przyjmuje zatem postać:

$$(3) \quad \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a(t)^3} + \frac{c^2}{3}\Lambda.$$

Wygodnie jest je zapisać przy użyciu wprowadzonych wcześniej parametrów:

$$(4) \quad \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m}{a(t)^3} + \Omega_\Lambda \right).$$

Powyższe równanie można również zapisać, używając definicji parametru Hubble'a: $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$. W takiej postaci można je znaleźć w wielu źródłach:

$$(5) \quad \left(\frac{H(t)}{H_0} \right)^2 = \frac{\Omega_m}{a(t)^3} + \Omega_\Lambda.$$

Pamiętając, że $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, rozważmy najpierw szczególne przypadki, kiedy jeden z parametrów jest równy 1, a drugi 0, a na koniec przypadek ogólny: $\Omega_m \neq 0, \Omega_\Lambda \neq 0$.

1) Wszechświat zdominowany przez materię, czyli $\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$. W tym przypadku równanie (4) sprowadza się do postaci:

$$\dot{a}(t) = \frac{H_0}{\sqrt{a(t)}}.$$

Jego rozwiązaniem (spełniającym warunek $a(t_0) = 1$) jest

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 (t - t_0) + 1 \right)^{2/3},$$

co można łatwo sprawdzić. Funkcja skali $a(t)$ jest rosnąca, $\dot{a}(t) > 0$, czyli opisuje rozszerzający się Wszechświat. Zauważmy jednak, że funkcja ta rośnie coraz wolniej – nachylenie stycznej do jej wykresu maleje, $\ddot{a}(t) < 0$. Oznacza to, że ekspansja tego Wszechświata zwalnia. Łatwo też sprawdzić, że parametr Hubble'a $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ dąży do zera przy $t \rightarrow \infty$. Jest to model bardzo podobny do Wszechświata mrówki Karoliny (opisanego w Δ_{23}^1 , w pierwszej części tego artykułu). Model ten opisywałby nasz Wszechświat, gdyby $\Lambda = 0$, a gęstość byłaby równa gęstości krytycznej.

2) Wszechświat zdominowany przez stałą kosmologiczną, czyli $\Omega_m = 0, \Omega_\Lambda = 1$. Tym razem równanie ewolucji (4) sprowadza się do

$$\dot{a}(t) = H_0 a(t).$$

Rozwiązanie, czyli funkcja

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)},$$

jest dokładnie takie samo, jak opisany w Δ_{23}^1 Wszechświat mrówki Ksymeny, który nie tylko się rozszerza ($\dot{a}(t) > 0$), ale także przyspiesza w nim ekspansja ($\ddot{a}(t) > 0$) – odległości pomiędzy galaktykami rosną coraz szybciej, a parametr Hubble'a $H(t) = \dot{a}(t)/a(t) = H_0$ nie zależy od czasu.

3) Przypadek ogólny: $\Omega_m \neq 0, \Omega_\Lambda \neq 0$. W tym przypadku rozwiązaniem równania (4) jest funkcja:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3} \left(\sinh \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} (t - t_0) + A \right) \right)^{2/3},$$

gdzie stałą A wyliczamy tak, aby $a(t_0) = 1$, co daje $A = \ln \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + 1} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right)$. Wygląda to może trochę skomplikowanie, ale po pierwsze należy docenić fakt, że w ogóle mamy analityczne rozwiązanie równania różniczkowego, które nie jest łatwe do rozwiązania.

Po drugie w rozwiązaniu występują kombinacje stałych, które trochę zaciemniają obraz. To, co jest najważniejsze, to: jaka jest zależność czynnika skali a od czasu. Kiedy przymknijemy oko na wszystkie stałe, to widzimy, że czynnik skali jest opisywany funkcją $a(t) \sim (\sinh(t))^{2/3}$.

Porównanie trzech typów rozwiązań. Jeżeli we wszystkich trzech przypadkach pominiemy na chwilę występujące w nich stałe i skupimy się tylko na tym, jakiego typu zależności od czasu występują w rozwiązaniach, to otrzymamy następującą listę:

1. $a(t) \sim t^{2/3}$,
2. $a(t) \sim e^t$,
3. $a(t) \sim (\sinh(t))^{2/3}$.

Wzory funkcji, które wcześniej wypisaliśmy w poszczególnych przypadkach, powstają z tych wymienionych powyżej poprzez pomnożenie argumentu funkcji przez stałą, przesunięcie o stałą i przemnożenie wartości funkcji przez jakąś stałą. Można zauważyć, że funkcja typu 3 jest w pewnym sensie czymś pośrednim pomiędzy typem 1 i 2. Otóż funkcja sinus hiperboliczny to po prostu kombinacja funkcji wykładniczych: $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Można pokazać, że dla małych argumentów t (podobnie jak zwykła funkcja sinus) sinus hiperboliczny jest dobrze przybliżany przez argument t (czyli $\sinh(t) \approx t$ dla $t \ll 1$). Natomiast dla dużych t dominuje człon z dodatnim wykładnikiem (ten z ujemnym wykładnikiem bardzo szybko dąży do 0), czyli $\sinh(t) \approx \frac{1}{2}e^t$, dla $t \gg 1$. Widzimy zatem, że rzeczywiście rozwiązanie typu 3 jest czymś pośrednim: dla małych t zachowuje się jak rozwiązanie typu 1, a dla dużych t jak rozwiązanie typu 2.

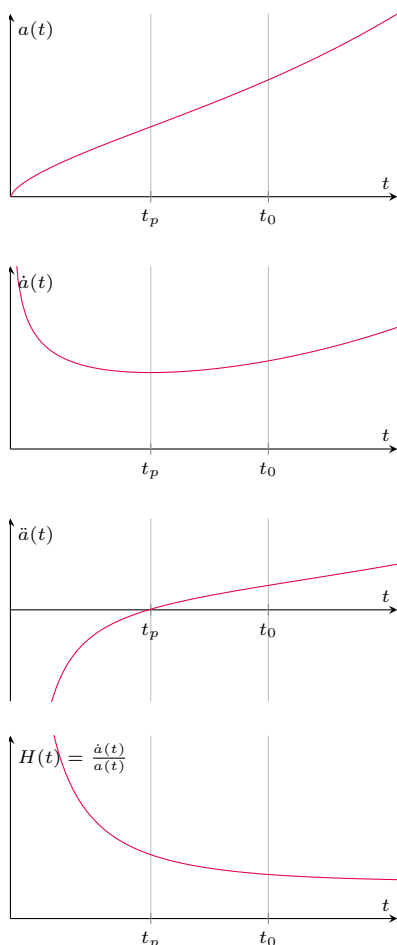
Przyspieszenie ekspansji i znaczenie stałej kosmologicznej. Przypadek 1 nazwalibyśmy

Wszechświatem zdominowanym przez materię, bo przyjęliśmy $\Lambda = 0$, więc ewolucja Wszechświata zależała tylko od gęstości materii. Widzimy, że gdyby $\Lambda = 0$, to rozszerzanie byłoby coraz wolniejsze, a parametr Hubble'a dążyłby do zera. Wszechświat, w którym $\Lambda \neq 0$, na początku (dla małych t) zachowuje się właśnie tak, czyli ekspansja w nim zwalnia. Dzieje się tak jednak do pewnego czasu. Jak widać na rysunku 1, funkcja $a(t) \sim (\sinh(t))^{2/3}$ ma punkt przegięcia, w którym jej druga pochodna $\ddot{a}(t)$ zmienia znak. Ekspansja przestaje zwalniać (co jest opisywane przez $\ddot{a}(t) < 0$) i zaczyna przyspieszać (czyli $\ddot{a}(t) > 0$), czyli dla dużych t zarządzanie ewolucją Wszechświata przejmuje Λ , dlatego rozwiązanie typu 2 nazwalibyśmy *zdominowanym przez stałą kosmologiczną*.

Tę zmianę na stanowisku „zarządzającego ewolucją” można też dostrzec, przyglądając się równaniu Friedmana w postaci (4) lub (5). Po jego prawej stronie mamy sumę dwóch składników. Ten pochodzący od stałej kosmologicznej Ω_Λ jest stały. Natomiast ten pochodzący od gęstości materii zależy od czynnika skali – jest proporcjonalny do $1/a(t)^3$. Jest to oczywiście

konsekwencja zależności, że gdy Wszechświat się rozszerza, to gęstość materii maleje (gdyby się kurczył, to gęstość by rosła). Kiedy Wszechświat jest młody (dla małych t), gęstość jest duża i w równaniu po prawej stronie mamy $\Omega_m/a(t)^3 \gg \Omega_\Lambda$, czyli dominuje

materia. Kiedy natomiast Wszechświat wchodzi w wiek coraz bardziej zaawansowany, to gęstość maleje i jeżeli poczekamy wystarczająco długo, to może być dowolnie mała. Wtedy prawą stronę równania rządzi stała kosmologiczna i mamy $\Omega_m/a(t)^3 \ll \Omega_\Lambda$.



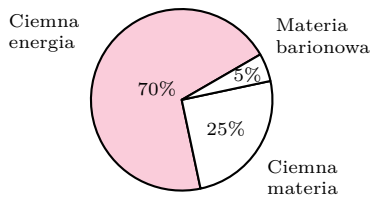
Rys. 1. Trzy pierwsze wykresy przedstawiają zależność od czasu czynnika skali $a(t) \sim (\sinh(t))^{2/3}$, jego pochodnej (czyli prędkości ekspansji) i jego drugiej pochodnej (czyli przyspieszenia ekspansji). t_0 to chwila obecna, a t_p to chwila, w której przyspieszenie zmieniło znak z ujemnego na dodatni (ekspansja przestała zwalniać i zaczęła przyspieszać), co widać na trzecim wykresie. W chwili t_p prędkość ekspansji osiągnęła minimum (drugi wykres), a wykres funkcji $a(t)$ ma w t_p punkt przegięcia. Warto przy okazji podkreślić, że przyspieszanie ekspansji nie oznacza, że parametr Hubble'a rośnie. Nawet w naszym przyspieszającym Wszechświecie parametr Hubble'a $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ maleje, co widać na czwartym wykresie. Nie dąży jednak do 0, jak we Wszechświecie zdominowanym przez materię, ale dąży do pewnej niezerowej stałej. Czyli dla dużych czasów ewolucja coraz bardziej przypomina zachowanie Wszechświata zdominowanego przez stałą kosmologiczną.

Parametry naszego Wszechświata. Powszechnie używany obecnie model kosmologiczny, zwany Λ -CDM, w odniesieniu do opisu tej części ewolucji (od chwili, kiedy Wszechświat miał kilka milionów lat, do teraz) jest właśnie taki, jak tu opisaliśmy. Λ odnosi się do stałej kosmologicznej, a CDM (*Cold Dark Matter* – zimna ciemna materia) oznacza, że ciemna materia zachowuje się właśnie tak, jak wcześniej założyliśmy. Bardziej skomplikowany w tym modelu jest oczywiście opis wczesnych etapów ewolucji, czyli pierwszych kilku milionów lat. Z dopasowania do danych obserwacyjnych otrzymujemy wartości parametrów $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ oraz $\Omega_m \approx 0,3$. Warto przypomnieć, że parametr Ω_m charakteryzuje łącznie materię barionową oraz ciemną materię, której jest około 7 razy więcej niż barionowej. Widać, że żyjemy w okresie przejściowym, kiedy to dominację w zarządzaniu ewolucją przejmuje stała kosmologiczna. Punkt przegięcia na wykresie funkcji $a(t)$ nastąpił około 6,2 miliarda lat temu. Jednocześnie wiek Wszechświata szacuje się na około 13,8 miliarda lat, co oznacza, że tempo ekspansji malało przez więcej niż połowę czasu istnienia Wszechświata, a potem zaczęło powoli przyspieszać. Wykresy ilustrujące zachowanie się naszego modelu dla wartości parametrów $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ oraz $\Omega_m \approx 0,3$ przedstawione są na rysunku 1.

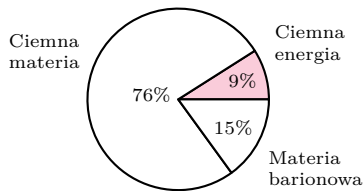
Wartości parametrów Ω_Λ i Ω_m są oczywiście wyznaczane z pozycji bardzo antropocentrycznej – ich definicja zawiera odniesienie do gęstości krytycznej mierzonej *teraz*, kiedy my, ludzie z planety Ziemia, ją wyznaczamy (rys. 2). Cywilizacja, która istniała być może w przeszłości, kiedy czynnik skali $a(t)$ był dwa razy mniejszy (rys. 3), wyznaczyłaby wtedy gęstość krytyczną 8 razy większą niż my teraz, a więc parametry wyznaczone przez nią miałyby wartości $\Omega_\Lambda \approx 0,1$ oraz $\Omega_m \approx 0,9$ (co można łatwo przeliczyć). Z kolei cywilizacja, która ewentualnie istniała, kiedy czynnik skali był 3 razy mniejszy (gęstość 27 razy większa), wyznaczyłaby $\Omega_\Lambda \approx 0,025$ oraz $\Omega_m \approx 0,975$ (rys. 4). Obserwacje wykonane przez obie te cywilizacje wypadają przed osiągnięciem punktu przegięcia przez czynnik skali $a(t)$. Czy astrofizycy tamtych cywilizacji wpadliby na pomysł, żeby dodawać do równań Einsteina stałą kosmologiczną? Czy byliby w stanie odróżnić $t^{2/3}$ od $(\sinh(t))^{2/3}$? Bardzo wątpliwe.

Nasi astrofizycy właśnie dlatego wprowadzili stałą kosmologiczną do równań Einsteina, żeby otrzymać model kosmologiczny pasujący do obserwacji, z których wynika, że ekspansja naszego Wszechświata przyspiesza.

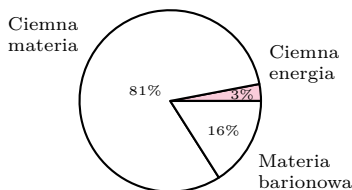
Ciemna energia? Jaka jest interpretacja fizyczna stałej kosmologicznej? Nie jest łatwo odpowiedzieć na to pytanie. Często używa się w odniesieniu do niej nazwy *ciemna energia*. Jednak już spojrzenie na równanie Friedmana pozwala zrozumieć, że jest to coś bardzo dziwnego. O ile człon związany z gęstością materii (i tej barionowej, i ciemnej) zachowuje się proporcjonalnie do $1/a(t)^3$, czyli jak uczciwa gęstość, to człon związany ze stałą kosmologiczną (jak sama nazwa wskazuje) jest stały. Gdyby uznać ją jako formę energii, to natrafiamy na pewien problem interpretacyjny: objętość rośnie, a gęstość tej energii się nie zmienia. Czy to oznacza, że ilość tej energii w zadanym obszarze rośnie? Problemów interpretacyjnych jest więcej i nie będziemy ich tu wszystkich wyliczać. Pokazaliśmy, że dodanie stałej kosmologicznej do równań Einsteina pozwala w prosty sposób wygenerować model kosmologiczny, w którym mamy zmianę charakteru ekspansji – ze zwalniającej na przyspieszającą, co pozwala dopasować model kosmologiczny do obserwacji. Jednak ten prosty zabieg matematyczny prowadzi do jednego z najbardziej fundamentalnych pytań, przed jakimi stoi dziś fizyka: czym jest ta stała kosmologiczna. Nazwanie jej ciemną energią nie przybliży nas do odpowiedzi. Sprawy, niestety, nie ułatwia fakt, że nie jesteśmy w stanie zmierzyć wartości stałej kosmologicznej w żadnym doświadczeniu laboratoryjnym, tak jak mierzymy wszystkie inne fundamentalne



Rys. 2. Diagram ilustrujący wkład różnych składników po prawej stronie równania Friedmana (5), często pojawiający się w publikacjach. Rysunek przedstawia stan, który obserwujemy teraz, czyli kiedy Wszechświat ma około 13,8 miliarda lat. W naszych rozważaniach wkład od materii barionowej i ciemnej materii opisujemy łącznie jednym parametrem: $\Omega_m = 0,3$



Rys. 3. Wkład różnych składników po prawej stronie równania Friedmana (5) w chwili, kiedy Wszechświat był „dwa razy mniejszy”, czyli kiedy wartość parametru skali $a(t)$ była równa $\frac{1}{2}$. Wiek Wszechświata wynosił wtedy około 5,9 miliarda lat, a gęstość krytyczna była wtedy $2^3 = 8$ razy większa niż teraz



Rys. 4. Kiedy parametr skali $a(t)$ był równy $\frac{1}{3}$, Wszechświat liczył sobie 3,3 miliarda lat, a gęstość krytyczna była $3^3 = 27$ razy mniejsza, wkład od ciemnej energii wynosił $\Omega_\Lambda = 0,025$

stałe. Jedynym źródłem naszej wiedzy o wartości Λ jest dopasowanie modelu całego Wszechświata do obserwacji.

Wczesny Wszechświat i inflacja. Jak już podkreślaliśmy, nie podejmujemy się tutaj modelowania Wszechświata od samego jego początku. Wszechświat na wczesnych etapach ewolucji był bardzo gorący i gęsty. Do opisanie tej fazy jego ewolucji konieczne jest uwzględnienie wszystkich oddziaływań pomiędzy składnikami materii, nie tylko grawitacyjnych. Jest to więc temat na zupełnie inną opowieść. Warto tutaj jednak zwrócić uwagę na to, że obecnie najpowszechniej uznawany model młodego Wszechświata zawiera etap zwany *kosmiczną inflacją*. Inflacja oznacza po prostu wykładniczą ekspansję, dokładnie taką jak opisuje rozwiązanie typu 2, czyli rozszerzanie jak we Wszechświecie mrówki Ksymeny. Model przewiduje, że etap ten trwał bardzo krótko, od około 10^{-36} s do około 10^{-32} s po Wielkim Wybuchu. W tym czasie czynnik skali zwiększył wartość co najmniej 10^{26} razy. W takim wykładniczo rozszerzającym się Wszechświecie występują efekty, które analizowaliśmy w pierwszej części artykułu w Δ_{23}^1 : oddalające się od siebie obiekty tracą możliwość komunikowania się. Taki właśnie efekt występuje w modelu inflacyjnym – obszary, które mogły się ze sobą komunikować, tracą tę możliwość. Po zakończeniu fazy inflacji tempo ekspansji zwalnia i wtedy (jak opisywaliśmy to we Wszechświecie mrówki Karoliny) objętość dostępna obserwacjom wybranego obserwatora zaczyna się powiększać i obszary, z którymi możliwość komunikacji została utracona, powoli tę możliwość odzyskują.

Co nas czeka w przyszłości? Model z różną od zera stałą kosmologiczną przewiduje, że po etapie zwalnijącej ekspansji, w którym obszar dostępny naszym obserwacjom rósł, wchodzimy znowu w etap wykładniczego tempa rozszerzania. Co za tym idzie, będziemy tracić możliwość komunikowania się z dalszymi obszarami Wszechświata, a część dostępna naszym obserwacjom będzie coraz bardziej pusta. Czy ten czarny scenariusz na pewno się ziści? Możliwe, że uratują nas jakieś nowe odkrycia. O tym, że nie wszystko jeszcze rozumiemy, świadczą chociażby rozbieżności w pomiarach parametru Hubble’a różnymi metodami, o czym pisał Krzysztof Turzyński w Δ_{19}^2 i Δ_{19}^{11} . Tymczasem za miesiąc w ostatniej części tego cyklu wrócimy do początku, czyli do tematu rozchodzenia się sygnałów w rozszerzającym się Wszechświecie i tego, jak z analizy tych sygnałów ekstrahować informacje o odległościach w Kosmosie i jak rozumieć odległości, które podają nam astronomowie.

Co kryją w sobie łączności?

Robert SZAFARCZYK*

* Unité de Formation et de Recherche de Mathématiques, Université Paris-Cité

Na pewno każdy z nas nie raz już słyszał, że mnożenie jest *łączne* (niektórzy mówią: *asocjatywne*), czyli czy pomnożymy $(2 \cdot 3) \cdot 4$, czy też $2 \cdot (3 \cdot 4)$, to w wyniku i tak dostaniemy 24. Niestety matematyka robi się coraz bardziej skomplikowana, matematycy mnożą przez siebie coraz to dziwniejsze rzeczy i nie każde działanie może pochwalić się byciem łącznym.

Na przykład topolog mógłby w taki oto sposób mnożyć odcinki jednostkowe:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \underline{b}$$

Zauważmy, że to działanie nie jest łączne. Mianowicie $(ab)c \neq a(bc)$, jak widać na rysunku.

$$\underline{a} \underline{b} \underline{c} \neq \underline{a} \underline{b} \underline{c}$$

Sytuacja nie jest jednak beznadziejna, ponieważ oba wyniki są do siebie bardzo podobne. Wystarczy odpowiednio przeskalować każdy z odcinków, by dostać bijekcję $(ab)c \rightarrow a(bc)$, zachowującą porządek wszystkich punktów. Takie przekształcenie nazywa się asocjatorem. Działanie to nie jest więc łączne, ale posiada (odwrotną) regułę pozwalającą zamienić wyrażenie $(ab)c$ na $a(bc)$.

Zastanówmy się teraz, co się dzieje, gdy mamy do czynienia nie z trzema, lecz czterema argumentami naszego mnożenia. Wówczas istnieje dokładnie pięć

Wspomnianą bijekcją może być funkcja kawałkami liniowa, określona wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \in [0, \frac{1}{4}), \\ x + \frac{1}{4} & \text{gdy } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{gdy } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$