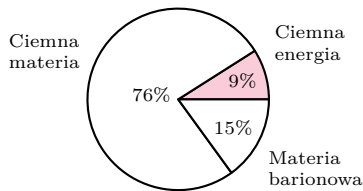
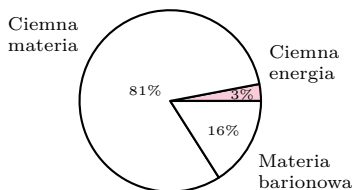


Rys. 2. Diagram ilustrujący wkład różnych składników po prawej stronie równania Friedmana (5), często pojawiający się w publikacjach. Rysunek przedstawia stan, który obserwujemy teraz, czyli kiedy Wszechświat ma około 13,8 miliarda lat. W naszych rozważaniach wkład od materii barionowej i ciemnej materii opisujemy łącznie jednym parametrem:  $\Omega_m = 0,3$



Rys. 3. Wkład różnych składników po prawej stronie równania Friedmana (5) w chwili, kiedy Wszechświat był „dwa razy mniejszy”, czyli kiedy wartość parametru skali  $a(t)$  była równa  $\frac{1}{2}$ . Wiek Wszechświata wynosił wtedy około 5,9 miliarda lat, a gęstość krytyczna była wtedy  $2^3 = 8$  razy większa niż teraz



Rys. 4. Kiedy parametr skali  $a(t)$  był równy  $\frac{1}{3}$ , Wszechświat liczył sobie 3,3 miliarda lat, a gęstość krytyczna była  $3^3 = 27$  razy mniejsza, wkład od ciemnej energii wynosił  $\Omega_\Lambda = 0,025$

stałe. Jedynym źródłem naszej wiedzy o wartości  $\Lambda$  jest dopasowanie modelu całego Wszechświata do obserwacji.

**Wczesny Wszechświat i inflacja.** Jak już podkreślaliśmy, nie podejmujemy się tutaj modelowania Wszechświata od samego jego początku. Wszechświat na wczesnych etapach ewolucji był bardzo gorący i gęsty. Do opisanie tej fazy jego ewolucji konieczne jest uwzględnienie wszystkich oddziaływań pomiędzy składnikami materii, nie tylko grawitacyjnych. Jest to więc temat na zupełnie inną opowieść. Warto tutaj jednak zwrócić uwagę na to, że obecnie najpowszechniej uznawany model młodego Wszechświata zawiera etap zwany *kosmiczną inflacją*. Inflacja oznacza po prostu wykładniczą ekspansję, dokładnie taką jak opisuje rozwiązanie typu 2, czyli rozszerzanie jak we Wszechświecie mrówki Ksymeny. Model przewiduje, że etap ten trwał bardzo krótko, od około  $10^{-36}$  s do około  $10^{-32}$  s po Wielkim Wybuchu. W tym czasie czynnik skali zwiększył wartość co najmniej  $10^{26}$  razy. W takim wykładniczo rozszerzającym się Wszechświecie występują efekty, które analizowaliśmy w pierwszej części artykułu w  $\Delta_{23}^1$ : oddalające się od siebie obiekty tracą możliwość komunikowania się. Taki właśnie efekt występuje w modelu inflacyjnym – obszary, które mogły się ze sobą komunikować, tracą tę możliwość. Po zakończeniu fazy inflacji tempo ekspansji zwalnia i wtedy (jak opisywaliśmy to we Wszechświecie mrówki Karoliny) objętość dostępna obserwacjom wybranego obserwatora zaczyna się powiększać i obszary, z którymi możliwość komunikacji została utracona, powoli tę możliwość odzyskują.

**Co nas czeka w przyszłości?** Model z różną od zera stałą kosmologiczną przewiduje, że po etapie zwalniania ekspansji, w którym obszar dostępny naszym obserwacjom rósł, wchodzimy znowu w etap wykładniczego tempa rozszerzania. Co za tym idzie, będziemy tracić możliwość komunikowania się z dalszymi obszarami Wszechświata, a część dostępna naszym obserwacjom będzie coraz bardziej pusta. Czy ten czarny scenariusz na pewno się ziści? Możliwe, że uratują nas jakieś nowe odkrycia. O tym, że nie wszystko jeszcze rozumiemy, świadczą chociażby rozbieżności w pomiarach parametru Hubble’a różnymi metodami, o czym pisał Krzysztof Turzyński w  $\Delta_{19}^2$  i  $\Delta_{19}^{11}$ . Tymczasem za miesiąc w ostatniej części tego cyklu wrócimy do początku, czyli do tematu rozchodzenia się sygnałów w rozszerzającym się Wszechświecie i tego, jak z analizy tych sygnałów ekstrahować informacje o odległościach w Kosmosie i jak rozumieć odległości, które podają nam astronomowie.

## Co kryją w sobie łączności?

Robert SZAFARCZYK\*

\* Unité de Formation et de Recherche de Mathématiques, Université Paris-Cité

Na pewno każdy z nas nie raz już słyszał, że mnożenie jest *łączne* (niektórzy mówią: *asocjatywne*), czyli czy pomnożymy  $(2 \cdot 3) \cdot 4$ , czy też  $2 \cdot (3 \cdot 4)$ , to w wyniku i tak dostaniemy 24. Niestety matematyka robi się coraz bardziej skomplikowana, matematycy mnożą przez siebie coraz to dziwniejsze rzeczy i nie każde działanie może pochwalić się byciem łącznym.

Na przykład topolog mógłby w taki oto sposób mnożyć odcinki jednostkowe:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \underline{b}$$

Zauważmy, że to działanie nie jest łączne. Mianowicie  $(ab)c \neq a(bc)$ , jak widać na rysunku.

$$\underline{a} \underline{b} \underline{c} \neq \underline{a} \underline{b} \underline{c}$$

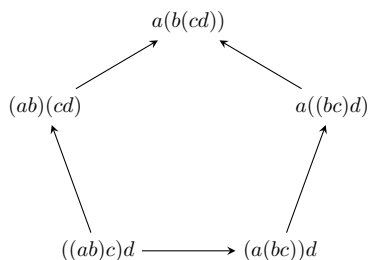
Sytuacja nie jest jednak beznadziejna, ponieważ oba wyniki są do siebie bardzo podobne. Wystarczy odpowiednio przeskalować każdy z odcinków, by dostać bijekcję  $(ab)c \rightarrow a(bc)$ , zachowującą porządek wszystkich punktów. Takie przekształcenie nazywa się *asocjatorem*. Działanie to nie jest więc łączne, ale posiada (odwrotną) regułę pozwalającą zamienić wyrażenie  $(ab)c$  na  $a(bc)$ .

Zastanówmy się teraz, co się dzieje, gdy mamy do czynienia nie z trzema, lecz czterema argumentami naszego mnożenia. Wówczas istnieje dokładnie pięć

Wspomnianą bijekcją może być funkcja kawałkami liniowa, określona wzorem

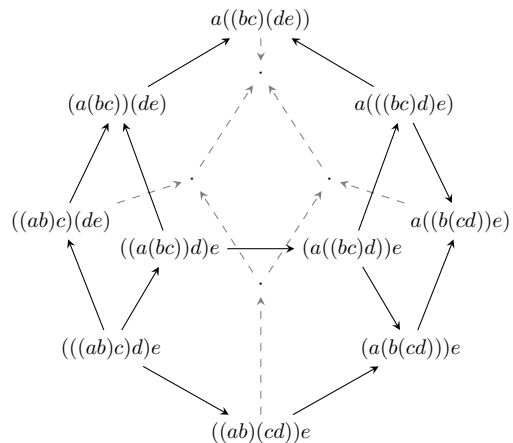
$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \in [0, \frac{1}{4}), \\ x + \frac{1}{4} & \text{gdy } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{gdy } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

możliwych kolejności wykonywania działań. Używając wcześniej zdefiniowanego asocjatora, możemy je wszystkie połączyć w taki oto pięciokąt.



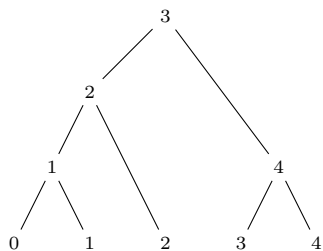
W szczególności otrzymujemy dwie *a priori* różne reguły pozwalające zamieniać  $((ab)c)d$  na  $a(b(cd))$  (górną i dolną ścieżkę w pięciokącie). Należy więc zadać sobie pytanie, czy są one takie same. W przykładzie z odcinkami rzeczywiście tak będzie, obie funkcje będą identyczne. Jednakże pojawiają się w matematyce działania, dla których i to nie jest prawdą. Na szczęście, pomimo że w pewnych przypadkach równości nie ma, często znajduje się jakaś (tym razem dwuwymiarowa) reguła łącząca oba sposoby. Taką dwuwymiarową regułę możemy sobie wyobrazić jako wypełnienie dla pięciokąta.

Teraz, mając działanie z ustalonym asocjatorem i regułą pięciokąta, możemy zbudować poniższy wielościan odpowiadający działaniu z pięcioma argumentami i znowu zapytać, czy istnieje dla niego (tym razem trójwymiarowe) wypełnienie. Wszystkie dwuwymiarowe ściany tej bryły uzupełnimy regułą pięciokąta lub „kwadratem” asocjatora.



(Grafika pochodzi z Wikimedia Commons)

Abstrakcyjne działania, dla których wybrano odpowiednie reguły dla wszystkich możliwych łączności, nazywa się  $\mathbb{A}_\infty$ -operadami. Analogicznie jak z łącznością, można też postąpić z przemiennością działania, wówczas mówi się o  $\mathbb{E}_\infty$ -operadach.



W powyższym przykładzie mamy:  $(a_i) = (1, 2, 3, 1)$ ,  $(b_i) = (1, 1, 2, 1)$ . Temu drzewu odpowiada zatem punkt  $(1, 2, 6, 1) \in \mathbb{R}^4$

Możemy tę zabawę ciągnąć w nieskończoność, rozważając coraz to większą liczbę argumentów i dostając coraz to bardziej skomplikowane kształty. Wielowymiarowy wielościan, który otrzymalibyśmy przy użyciu  $n + 1$  liter, będziemy oznaczać przez  $\mathcal{K}_n$  i będziemy nazywać *n-tym łącznościaniem* (*associahedron*).

Dla małych  $n$  łącznościany są dosyć proste:  $\mathcal{K}_1$  to punkt,  $\mathcal{K}_2$  to odcinek (tzn.  $(ab)c \rightarrow a(bc)$ ),  $\mathcal{K}_3$  to przedstawiony wcześniej pięciokąt. Skomplikowanie robi się później; już  $\mathcal{K}_4$  nie jest łatwe do opisanego, a co dopiero pozostałe, które nie mieszczą się nawet w trzech wymiarach.

Opisanie w ogólności, jak zrealizować  $\mathcal{K}_n$  w przestrzeni euklidesowej, jest zupełnie nieoczywiste, choć istnieje na to wiele różnych sposobów. Przedstawimy teraz jeden z najprostszych, zaproponowany przez Jeana-Louisa Lodaya (2004). Przypomnijmy, że drzewo jest *regularne*, jeśli wszystkie jego wewnętrzne wierzchołki mają ten sam stopień. Dla każdego regularnego drzewa binarnego (czyli takiego, gdzie każdy wierzchołek wewnętrzny ma dwoje dzieci) o  $n + 1$  liściach (ponumerowanych od lewej do prawej  $0, 1, \dots, n$ ) numerujemy jego wierzchołki wewnętrzne od 1 do  $n$  (wierzchołek o numerze  $i$  to ten, którego lewa odnoga zawiera liść numer  $i - 1$ , a prawa liść numer  $i$ ). Następnie oznaczamy przez  $a_i$  (odpowiednio  $b_i$ ) liczbę liści w lewej (odpowiednio w prawej) odnodze  $i$ -tego wierzchołka. Wówczas  $n$ -ty łącznościany to otoczka wypukła wszystkich otrzymanych w ten sposób punktów  $(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)$  w  $\mathbb{R}^n$ .

Ciekawe jest to, że każda ściana  $n$ -tego łącznościany powstaje przy użyciu łącznościany niższego wymiaru. Tu pisząc ściany, mamy na myśli wszystkie wierzchołki, krawędzie, ściany dwuwymiarowe, trójwymiarowe itd. Na przykład każdy wierzchołek to  $\mathcal{K}_1$ , każda krawędź to  $\mathcal{K}_2$ , każda ściana dwuwymiarowa jest albo pięciokątem, czyli  $\mathcal{K}_3$ , albo kwadratem, czyli  $\mathcal{K}_2 \times \mathcal{K}_2$ . Ogólnie mówiąc, skoro mnożenie przez punkt, czyli  $\mathcal{K}_1$ , nic nie zmienia, to każdą ścianę łącznościany  $\mathcal{K}_n$  możemy – być może nieco sztucznie – zapisać w postaci  $\mathcal{K}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{K}_{n_i}$ , gdzie  $n_1 + \dots + n_i = n$ .

Łącznościany mają też powiązania z kombinatoryką. Zauważmy, że każdy wierzchołek łącznościany  $\mathcal{K}_n$  odpowiada pewnemu rozstawieniu nawiasów w działaniu o  $n + 1$  argumentach. Wiadomo, ile jest takich rozstawień (więc i wierzchołków  $\mathcal{K}_n$ ):  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Jest to tak zwana *n-ta liczba Catalana*, którą oznaczamy przez  $C_n$ .

Liczby Catalana dość regularnie są przywoływane na łamach *Delty*, ostatnio w artykule Wojciecha Przybyszewskiego w  $\Delta_{22}^9$ , a miesiąc wcześniej Bartłomieja Bzdęgi ( $\Delta_{22}^8$ ).

Dochodzimy teraz do najbardziej zadziwiającego z faktów dotyczących łączności. Okazuje się, że ich struktura geometryczna ma bliski związek z problemem odwracania szeregów formalnych.

Szeregiem (formalnym) nazywamy napis postaci  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ , gdzie  $a_i$  są liczbami rzeczywistymi. Szeregi można dodawać i odejmować zupełnie tak samo jak wielomiany. Mnożenie też jest analogiczne, dla Czytelnika Nieprzekonanego zamieszczamy wzór na marginesie. Jedyny problem jest ze składaniem. Jeśli mamy dwa szeregi,  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  oraz  $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ , to napis  $A(B(x))$  niestety nie ma sensu. Jest tak choćby dlatego, że aby obliczyć wyraz wolny powstałego szeregu, musielibyśmy zsumować nieskończony ciąg  $a_0 + a_1b_0 + a_2b_0^2 + \dots$ , co zwykle jest niemożliwe.

Istnieje jednak klasa szeregów, dla których wszystko świetnie działa. Są to szeregi postaci  $x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$ . Nie dość, że dla dowolnych dwóch szeregów tej postaci ich złożenie jest dobrze zdefiniowane (każdy współczynnik nowo powstałego szeregu jest wyrażony przez skończoną sumę), to jeszcze dla dowolnego szeregu  $A(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$  istnieje szereg  $B(x) = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots$  spełniający  $A(B(x)) = x = B(A(x))$ , czyli będący odwrotnością  $A$ . Współczynniki  $B$  dla zadanych współczynników  $A$  mogą zostać wyznaczone następująco:

$$(1) \quad b_n = \sum_{\substack{\mathbf{m}=(m_1, m_2, \dots): \\ m_1+2m_2+3m_3+\dots=n}} (-1)^{|\mathbf{m}|} \frac{(n+|\mathbf{m}|)!}{(n+1)!m_1!m_2!\dots} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots$$

(sumujemy po wszystkich ciągach  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$  takich, że  $\sum_{i=1}^k im_i = n$ ; przyjmujemy  $|\mathbf{m}| = \sum_{i=1}^k m_i$ ). Okazuje się, że istnieje również piękny wzór, wykorzystujący geometrię łączności.

**Twierdzenie.** *Odwrotnością szeregu  $A(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$  jest szereg  $B(x) = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots$  zadany wzorem*

$$b_n = \sum_{F \in S(\mathcal{K}_n)} (-1)^{n - \dim F} a_F,$$

gdzie dla ściany  $F$  postaci  $\mathcal{K}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{K}_{n_i}$  piszemy  $a_F = a_{n_1} \cdot \dots \cdot a_{n_i}$ .

Jako przykład zastosowania rozważmy szereg  $A(x) = x - x^2$ . Wówczas wszystkie współczynniki  $a_k$  są zerowe oprócz współczynnika  $a_1$ , który wynosi  $-1$ .

Oznacza to, że  $a_F$  nie jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy ściana  $F$  jest postaci  $\mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_1$ , czyli gdy jest wierzchołkiem (w tym przypadku  $a_F$  jest równy  $(-1)^n$ ). Teraz: skoro  $\mathcal{K}_n$  ma  $C_n$  wierzchołków, a wymiar punktu  $\dim \mathcal{K}_1 = 0$ , to powyższe twierdzenie mówi, że szeregiem odwrotnym do  $A$  jest  $B(x) = x + C_1x^2 + C_2x^3 + \dots$ . A skoro  $C_0$  wynosi 1, to możemy go zapisać w skróconej formie  $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+1}$ .

Otrzymaliśmy więc funkcję tworzącą dla ciągu liczb Catalana! Pamiętając, skąd się ona wzięła, możemy wysnuć poniższy wniosek.

**Wniosek.** *Dla wszystkich  $x$  z przedziału  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  zachodzi tożsamość*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

*Dowód.* Jak już wiemy, szeregiem odwrotnym do szeregu  $A(x) = x - x^2$  jest szereg  $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+1}$ . Na przedziale  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  szereg  $B$  jest zbieżny. Jest tak dlatego, że liczby Catalana spełniają poniższe oszacowanie asymptotyczne:

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}.$$

Oznacza to, że na przedziale  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  funkcja  $B(x)$  jest funkcją odwrotną do funkcji  $x - x^2$  (zbieżność pozwala nam przejść od szeregów do funkcji). Z drugiej strony, za pomocą prostego rachunku (margines) możemy uzasadnić, że na tym samym przedziale funkcja  $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$  również jest funkcją odwrotną do  $x - x^2$ . Stąd dostajemy równość

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

którą można łatwo przekształcić w dowodzoną tożsamość. □

Iloczyn szeregów formalnych  
 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  oraz  
 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  to szereg formalny  
 $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ , którego wyrazy są  
określone wzorem  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ .

Dowód wzoru (1), jak również przytoczonego twierdzenia, można odnaleźć w pracy Marcelo Aguiara i Federico Ardila *Hopf monoids and generalized permutahedra* (2017).



**Rozwiązanie zadania M 1740.**  
Niech  $d_1 > d_2 > \dots > d_k$  będą dzielnikami liczby  $n$  takimi, że

$$n = \sum_{i=1}^k d_i. \text{ Ponieważ } d_1 < n, \text{ to } \frac{n}{d_1} \geq p.$$

Jako że  $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \dots, \frac{n}{d_k}$  jest rosnącym ciągiem liczb całkowitych, to

$$\frac{n}{d_i} \geq p + i - 1 \text{ dla } i = 1, \dots, k.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+k-1} &\geq \\ &\geq \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \dots + \frac{d_k}{n} = \frac{n}{n} = 1. \end{aligned}$$

Dla  $x \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4(x - x^2)}}{2} = \frac{1 - (1 - 2x)}{2} = x.$$