Twierdzenie OMGa

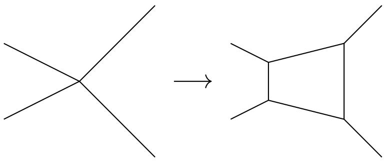
Bartłomiej BZDĘGA
Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Z okazji jubileuszu w 50. Kąciku Początkującego Olimpijczyka zajmę się pewnym twierdzeniem bezpośrednio związanym z Olimpiadą Matematyczną Gimnazjalistów (obecnie pod nazwą Olimpiada Matematyczna Juniorów)...

W OMG było sporo zadań, w których pytano: *czy istnieje wielościan, który...* Odpowiedź na ogół była pozytywna i stąd powstał żart – niestety nieznanego mi autora. Jego treść wyraża

Twierdzenie OMGa. *Wielościan istnieje.*

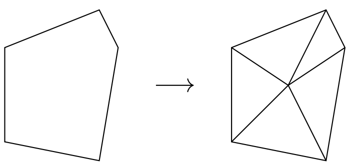
A teraz już na poważnie. Aby wykazać, że istnieje jakiś obiekt, wystarczy go pokazać. Taki dowód nazywamy konstruktywnym i właśnie tym się w niniejszym kąciku zajmiemy. Będziemy dowodzić istnienia wielościanów, konstruując je.



operacja (1)

Wspomniane zadania z OMG są bardzo różnej natury i każdemu z nich w zasadzie można by poświęcić oddzielny kącik. Ograniczę się tutaj do dwóch trików, które pozwalają zbudować wielościany o żądanej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian, a także wielościany z narzuconymi warunkami na liczby boków, ścian i stopnie wierzchołków (*stopniem* wierzchołka wielościanu nazywamy liczbę wychodzących z niego krawędzi). Wybierzmy dowolny wielościan wypukły jako punkt wyjścia. Będziemy wykonywać na nim następujące operacje:

(1) Ścięcie wierzchołka P stopnia d w taki sposób, by płaszczyzna cięcia przechodziła przez wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka P, ale nie przechodziła przez żaden wierzchołek tego wielościanu. Takie cięcie zagwarantuje płaszczyzna położona wystarczająco blisko wierzchołka P.
Ta operacja spowoduje:
– wzrost liczby ścian o 1 (powstaje ściana d-kątna);
– wzrost liczby krawędzi o d (są to krawędzie nowo powstałej ściany);
– wzrost liczby wierzchołków o $d-1$ (na miejsce wierzchołka P przychodzi d wierzchołków stopnia 3).
Ponadto wszystkie ściany, których wierzchołkiem był punkt P, zwiększają liczbę boków o 1.



operacja (2)

(2) Dobudowanie ostrosłupa, którego podstawą jest ściana $\mathcal{S}$ mająca b boków, w taki sposób, by kąty dwuścienne między ścianami tego ostrosłupa a sąsiednimi ścianami wielościanu były miary mniejszej niż 180°. Można to zrobić, dobudowując wystarczająco niski ostrosłup. Ta zmiana powoduje:
– wzrost liczby ścian o $b-1$ (na miejsce b-kąta pojawi się b trójkątów);
– wzrost liczby krawędzi o b (są to krawędzie boczne dobudowanego ostrosłupa);
– wzrost liczby wierzchołków o 1 (stopnia b).
Ponadto wszystkie wierzchołki dawnej ściany $\mathcal{S}$ zwiększą stopień o 1.

Możemy bawić się dalej i budować na ścianach wielościanu bardziej złożone konstrukcje albo ścinać nie tylko wierzchołki, ale krawędzie lub nawet całe ściany. Zabawę oraz wnioski z niej pozostawiam Czytelnikowi.

Zadania

Czy istnieje wielościan wypukły,

1. w którym liczba ścian i liczba wierzchołków są różnymi liczbami pierwszymi? (II Wielkopolska Liga Matematyczna Gimnazjalistów)
2. który ma tyle samo wierzchołków i ścian, ale nie jest ostrosłupem?
3. którego liczba krawędzi jest cztery razy większa od wartości bezwzględnej różnicy liczby jego ścian i wierzchołków?
4. w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej? (XI OMG)
5. który ma dokładnie siedem ścian sześciokątnych?
6. w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 i każde dwie ściany o wspólnej krawędzi mają różną liczbę boków?
7. który ma nieparzystą liczbę ścian i wszystkie wierzchołki parzystego stopnia? (VIII OMG)

Rozwiązania zadań

1. Po zastosowaniu operacji (1) do wszystkich wierzchołków podstawy ostrosłupa sześciokątnego otrzymamy bryłę o 13 ścianach i 19 wierzchołkach.

2. Po zastosowaniu operacji (2) do jednej ze ścian sześcianu otrzymamy bryłę o 9 wierzchołkach i 9 ścianach.

3. Sześcian po zastosowaniu operacji (1) na czterech jego wierzchołkach staje się bryłą o 24 krawędziach, 16 wierzchołkach i 10 ścianach.

4. Stosujemy operację (1) do wszystkich wierzchołków sześcianu z wyjątkiem dwóch, które są końcami jego dowolnej przekątnej. Otrzymana bryła ma ściany wyłącznie trójkątne i siedmiokątne, ponadto żadne dwie ściany trójkątne nie mają wspólnej krawędzi.

5. Jeden z wielościanów półforemnych, dwudziestościan ścięty (przypominający wyglądem piłkę nożną), ma 12 ścian sześciokątnych. Za pomocą operacji (2) nadmiarowe sześciokątne ściany zastępujemy trójkątnymi.

6. W graniastosłupie, którego podstawą jest ośmiokąt $ABCDEFGH$, wykonujemy operację (1) na wierzchołkach A,B,E,F.

7. Po zastosowaniu operacji (2) do co drugiej ściany bocznej graniastosłupa sześciokątnego otrzymamy bryłę o 17 ścianach, w której każdy wierzchołek ma stopień 4.