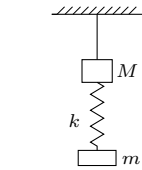


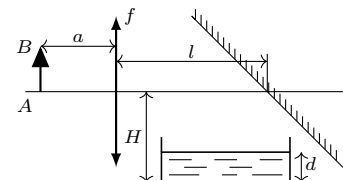
Klub 44 F



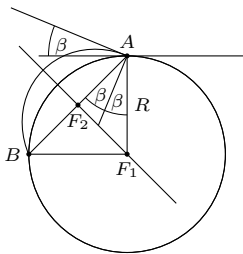
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2023



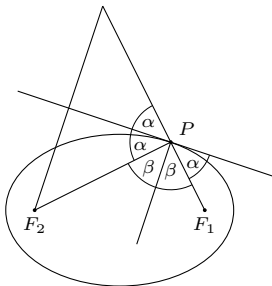
Rys. 1



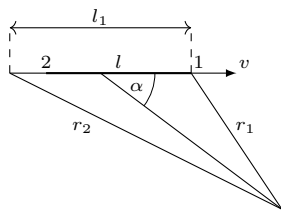
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

do obserwatora dociera światło wysłane przez przedni koniec pręta w chwili t_1 , a przez tylny koniec w chwili t_2 (rys. 5). Zachodzi związek $t_1 + \frac{r_1}{c} = t_2 + \frac{r_2}{c}$.

Widziana długość pręta wynosi

$$l_1 = l + v(t_1 - t_2) = l + v \frac{r_2 - r_1}{c}.$$

$r_1, r_2 \gg l_1$, bo obserwator znajduje się daleko, zatem

$$r_2 - r_1 = l_1 \cos \alpha.$$

Zadania z fizyki nr 752, 753

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

752. Na nieważkiej nici wiszą w jednorodnym polu ciężkości dwa ciężarki o masach M i m , połączone sprężyną o współczynniku sprężystości k i zaniedbywalnej masie (rys. 1). Nić przepalono. Po jakim czasie siła naciągu sprężyny po raz pierwszy osiągnie wartość zero? Zakładamy, że do tego momentu dolny ciężarek nie uderzy jeszcze w podłoże.

753. Przedmiot AB znajduje się w odległości $a = 36$ cm od ciennej soczewki o ogniskowej $f = 30$ cm. W odległości $l = 1$ m za soczewką umieszczono zwierciadło płaskie nachylone do osi optycznej soczewki pod kątem $\pi/4$ (rys. 2). W jakiej odległości H od osi optycznej soczewki należy umieścić dno naczynia z wodą, aby otrzymać na nim ostry obraz przedmiotu? Wysokość warstwy wody w naczyniu wynosi $d = 20$ cm, współczynnik załamania wody $n = 4/3$.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2022

Przypominamy treść zadań:

744. Z północnego bieguna Ziemi chcemy wystrzelić pocisk balistyczny (poruszający się pod wpływem siły ciężkości), który trafi w punkt na równiku, nadając mu najmniejszą możliwą prędkość początkową. Znaleźć wartość tej prędkości oraz kąt, pod którym należy oddać wystrzał. Opory ruchu zaniedbujemy, przyjmujemy, że Ziemia jest jednorodną kulą o promieniu R .

745. Długi cienki pręt porusza się ze stałą prędkością wzdłuż swojej osi. Obserwator znajduje się w dużej odległości od osi. W chwili, gdy promień skierowany na środek pręta utworzył kąt α z kierunkiem jego ruchu, widziana długość pręta okazała się równa jego długości spoczynkowej. Znaleźć prędkość pręta.

744. Pocisk porusza się po fragmencie AB elipsy (rys. 3), której jedno z ognisk F_1 znajduje się w środku Ziemi, a oś wielka leży na symetrycznej odcinka AB łączącego punkty startu i lądowania. Z zasady zachowania energii mamy związek:

$$(1) \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a},$$

gdzie a jest półosią wielką elipsy, M masą Ziemi, a v prędkością początkową pocisku o masie m . Prędkość ta jest najmniejsza, gdy minimalna jest energia całkowita, a tym samym minimalna jest oś wielka elipsy. Zatem drugie ognisko elipsy F_2 leży na odcinku AB , a oś wielka elipsy wynosi:

$$(2) \quad 2a = |AF_1| + |AF_2| = R + \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Podstawiając (2) do (1), otrzymujemy minimalną wartość prędkości początkowej pocisku:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R(\sqrt{2}+1)}} = \sqrt{2gR(\sqrt{2}-1)} = 7,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Styczna do elipsy w dowolnym punkcie P (rys. 4) jest prostopadła do dwusiecznej kąta utworzonego przez odcinki łączące ogniska elipsy z punktem P . Kąt $F_1AF_2 = 45^\circ$, dwusieczna tego kąta tworzy z odcinkiem F_1A kąt $\beta = 22,5^\circ$, z rysunku 3 widać, że kąt, jaki tworzy wektor prędkości początkowej pocisku z powierzchnią Ziemi, wynosi również $22,5^\circ$.

745. Niech długość spoczywającego pręta wynosi l_0 . Jego długość w układzie, w którym pręt porusza się z prędkością v równoległe do swojej osi, jest równa $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, gdzie c jest prędkością światła. Załóżmy, że w pewnej chwili

Obserwowana długość pręta

$$l_1 = \frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v \cos \alpha}{c}}.$$

Podstawiając $l_1 = l_0$, otrzymujemy szukaną prędkość pręta

$$v = \frac{2c \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po zakończeniu
roku szkolnego 2021/22

Sławomir Buć (Mystków)	43,90
Jacek Konieczny (Poznań)	33,42
Jan Zambrzycki (Białystok)	3 – 32,98
Ryszard Woźniak (Kraków)	32,96
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	2 – 32,56
Paweł Perkowski (Ożarów Maz.)	4 – 32,13
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3 – 18,61
Paweł Kubit (Kraków)	15,73
Tomasz Wietecha (Tarnów)	16 – 12,94

Lista obejmuje uczestników ligi, których stan konta wynosi co najmniej 12 punktów i którzy przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2020, 2021 lub 2022.

Zadanie **728** (WT = 3,23) dotyczyło ruchu cząstki naładowanej w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym z zadaną prędkością początkową. Maksymalne oceny uzyskali za nie **Piotr Adamczyk**, **Konrad Kapcia** i **Tomasz Wietecha**. Pozostałe rozwiązania zawierały błędy, a niektórzy uczestnicy nadesłali tylko drugie zadanie z tej serii, stąd stosunkowo wysoki współczynnik trudności.

W zadaniu **733** (WT = 3,06) zmienne pole magnetyczne w obszarze wewnątrz przewodzącego pierścienia w kształcie okręgu wytwarzało w nim stałą siłę elektromotoryczną. Należało znaleźć napięcie między dwoma punktami tego okręgu, do których na zewnątrz drutami oporowymi dołączony był amperomierz. Bez błędnie rozwiązał to zadanie **Piotr Adamczyk**. Pozostali uczestnicy często nie brali pod uwagę, że siła elektromotoryczna indukcji powstawała w każdym elemencie okręgu.

Zadanie **738** (WT = 2,71) było zadaniem z kinematyki. Stożek toczył się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej, a jego oś obracała się z zadaną prędkością kątową wokół osi pionowej przechodzącej przez wierzchołek stożka. Polecenie brzmiało: „Wyznaczyć prędkość liniową dowolnego punktu średnicy podstawy stożka leżącej w płaszczyźnie pionowej”. Miałam na myśli

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F w roku szkolnym 2021/2022

Współczynniki trudności tegorocznych zadań rozłożyły się dosyć symetrycznie – średnia wyniosła 2,22, pięć przekroczyło trójkę, cztery były mniejsze od dwóch.

Najwięcej problemów sprawiło zadanie **723** (WT = 3,77), gdzie relatywistyczna cząstka o znanej masie i energii kinetycznej zderza się niesprężysto z taką samą cząstką spoczywającą. Należało znaleźć maksymalną energię, jaka mogła być wykorzystana do wytworzenia nowych cząstek. Energia ta jest różnicą między energiami spoczynkowymi produktów i substratów reakcji, tymczasem większość uczestników przyjęła założenie, że całkowita masa układu nie zmienia się.

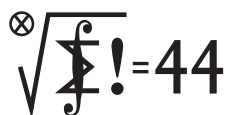
Trudności sprawiły też zadania z elektromagnetyzmu. Zadanie **727** (WT = 3,27), gdzie również nikt nie zdobył maksymalnej oceny, polegało na znalezieniu wytrzymałości drutu, z którego wykonano zwojnicę, aby nie uległ on rozerwaniu podczas przepływu prądu. Nadesłane rozwiązania zawierały założenie, że indukcja pola magnetycznego, w którym znajduje się pojedynczy zwój, jest w przybliżeniu taka sama, jak od całej zwojnicy. W rzeczywistości stanowi ona połowę tej wielkości.

płaszczyznę pionową zawierającą oś stożka oraz jego tworzącą styczną do podłoża – i tak zrozumiała to większość uczestników, ale nie zostało to doprecyzowane w treści zadania. Dlatego nie obniżałam punktów za przyjęcie innej interpretacji. Kluczowe w tym zadaniu było znalezienie związku między prędkościami kątowymi obrotu stożka wokół własnej osi i obrotu tej osi wokół osi pionowej. Poprawnie zrobili to **Piotr Adamczyk** i **Piotr Łaba**, którzy uzyskali oceny maksymalne.

Nie było oceny maksymalnej w zadaniu **734** (WT = 2,63), gdzie nitka odwijana ze szpulki toczącej się po stole wyciągana była stałą siłą przez otworek powyżej szpulki. Prawie wszyscy poradzi sobie z dynamiką zadania, gorzej było z kinematyką, czyli z odpowiedzią na pytanie, jaka długość nici została wyciągnięta przez otwór. Najbliższy prawidłowej odpowiedzi był **Paweł Perkowski**.

Czterech uczestników przekroczyło w tym roku granicę 44 punktów – **Tomasz Wietecha** po raz szesnasty (!), **Piotr Adamczyk** i **Konrad Kapcia** po raz drugi, **Ryszard Baniewicz** po raz pierwszy. Podobnie jak w roku ubiegłym, najbardziej skuteczny okazał się **Piotr Adamczyk**, który przysłał rozwiązania wszystkich zadań, a za 15 z nich otrzymał oceny maksymalne.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2023

Zadania z matematyki nr 855, 856

Redaguje Marcin E. KUCZMA

855. Rozważamy funkcje $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ spełniające warunki: $f(1) = 1$ oraz

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y), \quad \text{gdzie } x, y, x+y \in [0, 1].$$

Wyznaczyć najmniejszą liczbę $C > 0$ o tej własności, że dla każdej rozważanej funkcji f ma miejsce oszacowanie: $f(x) \leq Cx$ (dla $x \in [0, 1]$).

856. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg nieskończony (a_1, a_2, a_3, \dots) o wyrazach całkowitych dodatnich taki, że każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie raz w każdym z ciągów (a_1, a_2, a_3, \dots) oraz (d_1, d_2, d_3, \dots) , gdzie $d_i = |a_i - a_{i+1}|$.

Zadanie 856 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po zakończeniu sezonu
 (roku szkolnego) 2021/22

Stanisław Bednarek	2 – 42,60
Krzysztof Maziarz	40,67
Tomasz Wietecha	13 – 39,23
Paweł Najman	8 – 38,88
Mikołaj Pater	2 – 38,30
Krzysztof Zygan	38,26
Marcin Kasperski	4 – 37,65
Adam Woryna	3 – 36,14
Radosław Kujawa	35,83
Janusz Olszewski	22 – 34,88
Norbert Porwol	34,16
Tomasz Czajka	33,74
Paweł Kubit	7 – 28,03
Marian Łupieżowicz	1 – 27,63
Piotr Sołtan	27,12
Janusz Wojtal	25,48
Jędrzej Biedrzycki	24,36
Janusz Fiett	3 – 23,73
Szymon Tur	22,47
Marcin Małogrosz	4 – 20,62
Michał Kieza	4 – 20,46
Piotr Kumor	15 – 20,31
Karol Matuszewski	1 – 19,74
Grzegorz Wiączkowski	19,44
Roksana Słowik	2 – 17,94
Semen Slobodianuk	17,86
Łukasz Merta	2 – 17,69
Krzysztof Kamiński	3 – 17,36
Marek Prauza	4 – 16,62
Piotr Łaba	14,50

Legenda (przykładowo):
 stan konta 7 – 28,03 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 28,03 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
 – stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;
 – przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2020, 2021 lub 2022.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M
 (w kolejności uzyskiwania statusu weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałęcki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (15), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (22), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (13), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczański, M. Adamaszek (7), P. Kubit (7), J. Cisło (16), W. Bednarek (9), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedziej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett, M. Spychała (4), A. Kurach
 (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Rozwiązania zadań z numeru 10/2022

Przypominamy treść zadań:

847. Dana jest funkcja ciągła $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o następującej własności: dla każdej pary liczb a, b , gdzie $a < b$, istnieją liczby u, v takie, że $a \leq u < v \leq b$ oraz $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ dla $x \in [a, b]$. Udowodnić, że funkcja f jest niemalejąca.

848. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n \geq 3$. Niech X będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych (x_1, x_2, \dots) o wyrazach $x_i \in \{1, \dots, n\}$ i niech B będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych (b_1, b_2, \dots) o wyrazach $b_i \in \{0, 1\}$. Wyjaśnić, czy istnieje różnowartościowe odwzorowanie zbioru X na cały zbiór B takie, że (dla każdej liczby naturalnej k): jeżeli dwa ciągi $(x_i), (y_i)$ ze zbioru X pokrywają się na odcinku początkowym długości k (tzn. $x_i = y_i$ dla $i \leq k$), to ich obrazy także pokrywają się na odcinku początkowym długości k .

847. Weźmy dowolne liczby $a < b$; należy dowieść, że $f(a) \leq f(b)$. Oznaczmy przez m i M najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale $[a, b]$. Z założenia istnieją liczby $u, v \in [a, b]$, $u < v$, dla których $f(u) = m$, $f(v) = M$. Przyjmijmy, że u jest najmniejszą, zaś v – największą liczbą (w przedziale $[a, b]$) o powyższej własności (ich istnienie wynika z ciągłości funkcji f).

Przypuśćmy, że $a < u$; więc $f(x) > m$ dla $x \in [a, u)$. W myśl założenia, istnieją w przedziale $[a, u]$ liczby $u' < v'$, w których f przyjmuje (odpowiednio) swoją najmniejszą i największą wartość na $[a, u]$. To jednak niemożliwe, bo najmniejszą wartością jest $m = f(u)$, i nie jest ona osiągnięta w żadnym punkcie przedziału $[a, u)$. Sprzeczność pokazuje, że $u = a$. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że $v = b$. Zatem $f(a) = m \leq M = f(b)$.

848. Istnieje. Jako przykład niech posłuży kodowanie z użyciem bloków (słów binarnych):

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 01, \beta_3 = 001, \beta_4 = 0001, \dots,$$

$$\beta_{n-1} = \underbrace{00 \dots 0}_{n-2} 1, \quad \beta_n = \underbrace{00 \dots 00}_{n-1}.$$

Weźmy dowolny ciąg $\mathbf{x} \in X$ (słowo nieskończone): $\mathbf{x} = xyz \dots$ (zapis bez nawiasów i przecinków; $x, y, z, \dots \in \{1, \dots, n\}$). Przyporządkujmy mu ciąg (słowo) $\mathbf{b} = F(\mathbf{x}) \in B$: $\mathbf{b} = \beta_x \beta_y \beta_z \dots$ (bloki napisane jeden za drugim – konkatencja słów β_i). Jasne, że jeśli dwa słowa z X pokrywają się na odcinku początkowym, to ich F -obrazy pokrywają się na odcinku początkowym co najmniej tej samej długości.

Weźmy teraz dowolny ciąg zerojedynkowy $\mathbf{b} \in B$ i zauważmy, że *dokładnie jedno* ze słów β_i jest jego odcinkiem początkowym. Odrzucamy ten odcinek; to, co zostaje, jest znów długim słowem binarnym, rozpoczynającym się dokładnie jednym ze słów β_i ; itd. Indukcyjnie uzyskujemy jednoznaczne przedstawienie rozważanego (nieskończonego) słowa binarnego w postaci konkatencji $\mathbf{b} = \beta_x \beta_y \beta_z \dots$. Ciąg $\mathbf{x} = xyz \dots$ jest elementem zbioru X , zaś $\mathbf{b} = F(\mathbf{x})$. Opisane odwzorowanie $B \rightarrow X$ jest odwróceniem przyporządkowania F i uzasadnia jego bijektywność.

Przykład ilustrujący metodę „rozkodowania”, gdy $n = 4$ (więc $\beta_1 = 1, \beta_2 = 01, \beta_3 = 001, \beta_4 = 000$):

$$\mathbf{b} = 01010000111001 \dots = 01|01|000|01|1|1|001| \dots \mapsto 2242113 \dots = F^{-1}(\mathbf{b}).$$

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 M w roku szkolnym 2021/2022

Jak co roku o tej porze, przyjrzymy się wybranym zadaniom z minionego sezonu – więc głównie tym, które okazały się trudniejsze (wysoki współczynnik trudności WT i/lub niewielka liczba poprawnych rozwiązań LPR).

Przedstawiamy ciekawe pomysły rozwiązań oraz komentarze uczestników. Niektóre ich fragmenty umieszczamy w e-wydaniu (w zakładce „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

* * *

Zadanie 825. [Graf ważony, $n \geq 4$ wierzchołków, krawędzie o wagach $\neq 0$, suma wag $= \pm 1$; tak samo w każdym grafie uzyskanym przez zmianę znaku wag krawędzi z wybranego wierzchołka; także przy powtórzeniu tej operacji; możliwe wartości iloczynu wag?] ($WT = 2,50$; $LPR = 6$).

Pozostali członkowie Klubu 44 M
(alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, E. Merta, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, M. Pater, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Slowik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski, B. Żmija;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwiak, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowicz, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłega, K. Matuszewski, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, K. Morawski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piłkuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, J. Węgrecki, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

$$(1) \quad \triangle CPR \sim \triangle COM \sim \triangle CBD \sim \triangle CED,$$

w którym środkowa relacja wynika z izogonalności $\sphericalangle MCO = \sphericalangle DCB$, a pozostałe są oczywiste; wniosek:

$$\frac{CP}{CE} = \frac{CR}{CD}, \quad \sphericalangle PCR = \sphericalangle ECD, \quad \text{więc też } \sphericalangle PCE = \sphericalangle RCD,$$

zatem $\triangle PCE \sim \triangle RCD$; stąd

$$(2) \quad \sphericalangle CEP = \sphericalangle CDR = \sphericalangle QDR = \sphericalangle QOR$$

oraz (wobec (1)):

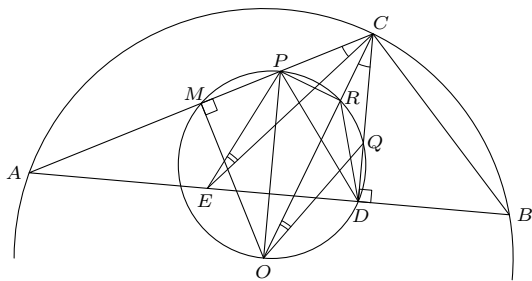
$$(3) \quad \sphericalangle CED = \sphericalangle COM = \sphericalangle ROM$$

i przez dodanie (2) i (3) (z wykorzystaniem równości $MC = MD$):

$$\sphericalangle PED = \sphericalangle QOM = \sphericalangle QDM = \sphericalangle CDM = \sphericalangle PCD$$

– a to już w zasadzie teza zadania. Tylko uwaga: tu wszystko gra przy konfiguracji jak na rysunku; jednak nazwane punkty mogą leżeć w różnych uporządkowaniach (na prostych CA , CD i na okręgu ODM); przy każdym uporządkowaniu rachunek przechodzi po kosmetycznych zmianach (np. *dodanie* (2), (3) może się okazać *odjęciem* itp.).

W podobnym stylu, angażując nieco więcej trygonometrii, zrobił zadanie **Janusz Olszewski**; zaś w pełni rachunkowo: **Mikołaj Pater** i **Marian Łupieżowicz**.



Rysunek do zadania 829

Odpowiedź: $-1, -\frac{1}{16}, +1$. Bezbledne rozwiązania, w stylu zbliżonym do firmowego: **M. Adamaszek** (najbardziej zwięzły opis), **J. Olszewski**, **A. Kurach**; a z niewielkimi usterkami (łatwo poprawialnymi, choć zmieniającymi odpowiedź): **J. Fiett**, **P. Łaba**, **M. Spychała**. Ponadto dwie prace z wieloma istotnymi spostrzeżeniami, ale z tak znaczącymi lukami, że trudno je uznać za pełne rozwiązania.

Zadanie 827. [$T_m = \underbrace{33\dots3}_m$]; czy istnieją n, m takie, że nT_m ma sumę

cyfr $< 3m$? ($WT = 2,35$; $LPR = 7$). Nie istnieją. **Piotr Kumor** udowodnił, że (ogólniej) jeśli $m, n, B, g \in \mathbb{N}$, $B \mid g-1$, to w zapisie przy podstawie B liczba $n \cdot \underbrace{BB\dots B}_m$ ma sumę cyfr $\geq mB$; dowód używa niebanalnych faktów

pomocniczych (\rightarrow e-wydanie). Inne dobre prace: **M. Adamaszek**, **A. Kurach**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**, **B. Żmija** oraz (z niejasnościami w opisie) **N. Porwol**.

Zadanie 829. [$\triangle ABC$: $\sphericalangle A < \sphericalangle B < 90^\circ < \sphericalangle C$; CD – wysokość;

O – środek okręgu opisanego; M – środek AC ; $E = \text{sym}_D(B)$;

(okrąg ODM) \cap (prosta AC) = $\{M, P\} \Rightarrow$ okręgi DCP , DEP przystające]

($WT = 3,29$; $LPR = 5$). Najzwięźlej: **Michał Adamaszek** – rozwiązanie firmowe, skrócone dzięki odwołaniu do twierdzenia „o motylku” (opcja sygnalizowana w „firmówce”, Δ_{22}^3). Popatrzmy teraz na efektywne rozwiązanie, jakie przedstawił **Miłosz Kwiatkowski**: niech okrąg ODM (o średnicy OP) przecina proste OC , CD odpowiednio w punktach $R (\neq O)$, $Q (\neq D)$; mamy ciąg podobieństw trójkątów prostokątnych:

Zadanie 831. [$A = a^{2022} + b^{2021} + c^{2021} + d^{2022}$, $B = a^{2021} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2021}$, gdzie $a \geq b \geq c \geq d \geq 1$, $bc < ad$; (a) $A < B$? $A > B$?

(b) $\forall a > d \geq 1 \forall q > 1 \exists b, c \in (d, a)$: $bc < qad$; relacja między A, B przeciwna niż w (a)] ($WT = 2,52$; $LPR = 6$). Dobrą odpowiedź na pytanie (a) ($A > B$) uzyskało więcej osób; ale (nieoczekiwanie) część (b) okazała się bardziej wymagająca: tylko **M. Adamaszek**, **P. Kumor**, **A. Kurach**, **M. Spychała**, **B. Żmija** oraz (z usterką łatwo poprawialną) **M. Pater**.

Zadanie 832. [n -kąt wypukły, $n \geq 3$; znaleźć (max k), dla którego można tak ponumerować wierzchołki $1, \dots, n$, że $\forall \ell \in \{1, \dots, n-1\} \exists i, j$ – numery sąsiednich wierzchołków: $|i - j| = \ell$, przy czym dla $\ell = k$ są dwie takie pary i, j] ($WT = 2,24$; $LPR = 8$). Odpowiedź: max $k = \lfloor n^2/2 \rfloor$. **Michał Adamaszek**, autor zadania, opatrzył je ciekawymi uwagami, które zamieściliśmy wraz z rozwiązaniem firmowym (Δ_{22}^4); na przykład spostrzeżeniem, że dla *każdej* permutacji (a_1, \dots, a_n) zbioru $\{1, \dots, n\}$: $\sum_{\text{cykl}} |a_i - a_{i+1}| \leq \lfloor n^2/2 \rfloor$. To samo *spostrzeżenie* zostało wyodrębnione w pracach, które przysłali **K. Morawski** i **P. Kumor**; ale faktycznie jest ono obecne (bez wyeksponowania, jako fragment dowodu) także w pozostałych dobrych pracach (**J. Cisko**, **Ł. Merta**, **J. Olszewski**, **B. Żmija**, **K. Maziarz**).

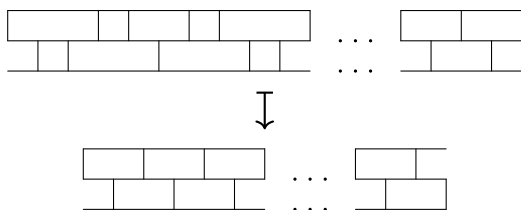
Piotr Kumor, swoim zwyczajem, dołączył obszerny komentarz, a w nim uwagi, jak u autora zadania; przy tym wzmiankowane *spostrzeżenie* jest rozszerzone do wskazania maksimum sumy $\sum_{\text{cykl}} |a_i - a_{i+1}|$, gdy (a_1, \dots, a_n) jest permutacją dowolnie ustalonego ciągu rosnącego długości n (niekoniecznie $(1, \dots, n)$); szczegóły w e-wydaniu.

Zadanie 833. $[\triangle CEG$ wewnątrz okręgu Ω , przecinającego proste CE ; CG ; EG odpowiednio w punktach B, F ; A, I ; D, H ; okrąg wpisany w figurę ABC styczny do Ω w punkcie K ; analogiczna definicja punktów L, M (przy figurach DEF, GHI) \Rightarrow proste CK, EL, GM mają punkt wspólny] ($WT = 3,29$; $LPR = 4$). Rozumowanie firmowe (składanie jednokładności) zastosował **Michał Adamaszek** oraz **Janusz Olszewski**. Również **Marek Spychała** użył tej samej (faktycznie) metody, choć bez użycia słowa *jednokładność*: wprowadzając punkty styczności różnych okręgów i prostych oraz stosując twierdzenie sinusów do kilku trójkątów, które się pojawiły, scharakteryzował szukany punkt przez jego położenie na odcinku łączącym środek okręgu Ω ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CEG , dzielące ów odcinek w określonej proporcji.

Na odrębną uwagę zasługuje rozwiązanie, jakie przedstawił **Jerzy Cisło**. Zamieszczamy w e-wydaniu kopię tej pracy, bez żadnego retuszu, i zachęcamy do jej przestudiowania. Nie jest to łatwe – objaśnienia są bardzo lakoniczne w środkowym fragmencie (w którym ponadto trzeba „romb” zamienić na „równoległobok”). Kto zdoła przejść przez tę nieco wyboistą ścieżkę, w nagrodę zobaczy naprawdę ładny i niebanalny dowód.

Zadanie 835. $[x_1, \dots, x_n \in \{1, 2, 3\}; n \equiv 0 \pmod{3}; |\{i: x_i = k\}| = n/3$ dla $k = 1, 2, 3 \Rightarrow \exists k, l: x_k + \dots + x_l = n]$ ($WT = 2,59$; $LPR = 9$).

Trudność zasadzała się w tym, jak zapisać rozumowanie zgrabnie i czytelnie. **Jerzy Cisło** pokazał, że to jak najbardziej wykonalne: układamy w linii klocki długości 1, 2, 3, tyle samo ($n/3$) każdego rodzaju; linia ma długość $2n$; należy wykazać, że pewien fragment ma długość n . Przypuśćmy, że tak nie jest; przetnijmy pasek klocków w połowie (przecinając przy tym pewien klocek) i umieśćmy jedną połowę nad drugą. Przerwy pomiędzy górnymi klockami muszą wypaść wewnątrz dolnych i odwrotnie; każdy klocek długości 1 znajdzie się nad lub pod środkiem klocka długości 3. Usuńmy klocki długości 1 oraz środkowe fragmenty klocków długości 3.



Widzimy teraz tylko klocki długości 2, w ilości nieparzystej (bo jeden przecięty). Jest ich jednak tyle, ile (początkowo) było łącznie klocków długości 2 i 3; to oczekiwana sprzeczność, bo jednych i drugich było wszak tyle samo. To jest to!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

Czytelny zapis – również dzięki wizualizacji „geometrycznej” – uzyskali **Radosław Kujawa** i **Janusz Olszewski** (który ponadto zwrócił uwagę, że prawie to samo zadanie znajduje się w książce Musztańskiego *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*; zad. 353). Pozostałe rozwiązania (w tym firmowe: Δ_{22}^6) – to bardziej lub mniej zgrabna formalizacja algebraiczna.

Zadanie 838. [Równanie $x^4 + y^4 = z^2 + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$] ($WT = 2,24$; $LPR = 10$). **Witold Bednarek** zaproponował to zadanie, wraz ze zgrabnym rozwiązaniem, które zostało opublikowane (Δ_{22}^7) jako firmowe (prosta rekurencja liniowa z pitagorejskimi parametrami 8, 15). Taką właśnie metodą zrobili to zadanie **Jerzy Cisło** i **Janusz Olszewski**. Jednak większość prac polegała na odwołaniu do tożsamości $X^4 + Y^4 = Z^2 + P^4$, gdzie $X, Y = 17p^2 \pm 12pq - 13q^2$, $Z = 289p^4 + 14p^2q^2 - 239q^4$, $P = q^2 - 17p^2$.

Wystarczy tutaj wstawić jako p, q dowolne liczby całkowite, dla których $P = \pm 1$ (a to równanie Pella, spełnione przez nieskończenie wiele par p, q) i przyjąć $x = |X|$, $y = |Y|$, $z = |Z|$. Podaną tożsamość można znaleźć w sieci; uczestnicy najczęściej powoływali się na <http://sites.google.com/site/tpiezas/009> (niektórzy wypisali tożsamość bez żadnego odsyłacza, więc zapewne należy domniemywać(!), że samodzielnie ją odkryli).

Metoda „firmowa” też jest podatna na uogólnienia (notka redaktora ligi w e-wydaniu).

Równanie z zadania w ogóle okazało się znane. Listę wszystkich 87 rozwiązań z $x, y < 10^4$ znalazł w sieci **Marek Spychała** (\rightarrow e-wydanie) oraz **Tomasz Wietecha**, który zwrócił uwagę, że tylko jedno z nich uzyskuje się ze wspomnianej tożsamości (dla $p = 1, q = 4$).

Zadanie 842. [Trzy koła:

$$K(A, r_A) \cap K(B, r_B) \cap K(C, r_C) \neq \emptyset;$$

$$\triangle A'B'C': A'B' \leq AB; A'C' \leq AC; B'C' \leq BC \Rightarrow$$

$$K(A', r_A) \cap K(B', r_B) \cap K(C', r_C) \neq \emptyset]$$
 ($WT = 2,98$; $LPR = 5$).

Rozwiązania uznane za poprawne (w kolejności precyzji, pełności argumentacji oraz czytelności opracowania): **J. Olszewski**, **K. Zygan**, **W. Malinowski**, **J. Cisło**, **P. Łaba**; zastosowane metody ustępują jednak prostotą rozwiązaniu, jakie znalazł autor zadania, **M. Adamaszek**, i które zostało wydrukowane jako firmowe (Δ_{22}^9). Ponadto jedna praca z bardzo dobrym pomysłem, ale ze znaczącym niedopatrzeniem w dowodzie.

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.