Kilka słów na temat twierdzenia Marcinkiewicza o próbkowaniu

Aleksander PAWLEWICZ

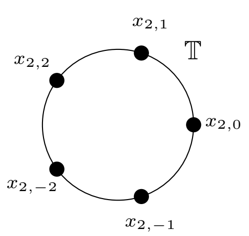
Chciałbym opowiedzieć w tym artykule o pewnym wyniku zdolnego, młodego polskiego matematyka Józefa Marcinkiewicza. Piszę „młodego”, ponieważ umarł w wieku zaledwie 30 lat, w roku 1940. Został zamordowany, jak bardzo wielu polskich oficerów, w Charkowie lub Katyniu. Historia życia J. Marcinkiewicza miała niewątpliwie smutne zakończenie, ale jego działalność matematyczna była bardzo intensywna, o czym świadczyć może na przykład fakt uzyskania tytułu doktora habilitowanego w wieku 27 lat. Działalność naukowa bohatera tego artykułu związana była z Uniwersytetem Stefana Batorego w Wilnie. Te i wiele innych ciekawych informacji o życiu i pracy J. Marcinkiewicza można znaleźć w obszernym artykule Lecha Maligrandy (zob. margines).

L. Maligranda, *Józef Marcinkiewicz (1910–1940) — on the centenary of his birth*, Banach Center Publications 95 (1), Institute of Mathematics Polish Academy of Science, Warszawa 2011.

Niewątpliwie najbardziej znanym twierdzeniem związanym z tym wybitnym polskim matematykiem jest twierdzenie Marcinkiewicza o interpolacji. Ścisłe sformułowanie wymaga, by najpierw powiedzieć coś o przestrzeniach funkcji L^p (indeksowanych parametrem $p \geqslant 1$), ograniczmy się więc – na razie – do następującego uproszczenia. Jeśli mamy dany operator liniowy, którego argumentami i wartościami są funkcje, to z wiedzy o zachowaniu owego operatora w ograniczeniu do przestrzeni L^p i L^q wspomniane twierdzenie pozwala wnioskować o jego zachowaniu na L^r dla wszystkich pośrednich r (czyli $p < r < q$) – stąd też określenie „interpolacja”. Do tego tematu jeszcze wrócimy.

Twierdzenie o próbkowaniu

Przejdźmy teraz do sedna tego artykułu, czyli do twierdzenia Marcinkiewicza o próbkowaniu (więcej informacji można znaleźć we wspomnianym artykule L. Maligrandy, paragraf 4.5.3). Samo słowo „próbkowanie” odnosi się do wyciągania wniosków o całej populacji na podstawie ograniczonej próbki. W kontekście twierdzenia Marcinkiewicza rolę populacji odgrywa funkcja f określona na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$, a interesować będzie nas średnia z funkcji $|f|^p$ dla pewnego $p \geqslant 1$. Można ją wyznaczyć jako wartość całki $\int_{\mathbb{T}} |f|^p$ podzielonej przez 2π, czyli długość okręgu jednostkowego – intuicja związana ze *średnią* powinna jednak Czytelnikowi wystarczyć, jeśli nie zna pojęcia całki.



Próbka punktów na okręgu $\mathbb{T}$ w przypadku $n = 2$

Ustalmy liczbę naturalną n i powiedzmy, że znamy wartości funkcji f w $2n+1$ punktach $x_{n,0}, x_{n,\pm1}, \ldots, x_{n,\pm n}$ równo rozmieszczonych na okręgu (jak na rysunku obok). Dysponując taką „próbką”, możemy mieć nadzieję, że średnią z $|f|^p$ po całym okręgu będzie dobrze przybliżać średnia z liczb $|f(x_{n,k})|^p$ dla $k = 0, \pm1, \ldots, \pm n$. Oczywiście tę drugą można wyliczyć jako wartość sumy $\sum_k |f(x_{n,k})|^p$ podzielonej przez $2n+1$. Na potrzeby dalszej analizy wprowadźmy oznaczenia na obie średnie:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f|^p\right)^{1/p}, \qquad \|f\|_{\ell_n^p} = \left(\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} |f(x_{n,k})|^p\right)^{1/p}.$$

Podniesienie jednej i drugiej średniej do potęgi $1/p$ pozwala wykorzystać te formuły do określenia odległości między dwiema funkcjami f, g za pomocą wzoru $\|f-g\|_{L^p}$ (lub też $\|f-g\|_{\ell_n^p}$). Dzięki temu bowiem odległość między funkcją $2 \cdot f(x)$ a funkcją zerową jest dwa razy większa niż odległość między $f(x)$ i zerem, a nie 2^p razy większa.

Wróćmy do samego twierdzenia. Byłoby naiwnością oczekiwać, że wielkości $\|f\|_{L^p}$ i $\|f\|_{\ell_n^p}$ są porównywalne – wszak średnia z $|f|^p$ może być duża nawet wtedy, gdy funkcja f zeruje się w $2n+1$ punktach $x_{n,k}$. Dlatego ograniczymy się do wielomianów trygonometrycznych stopnia n, czyli funkcji postaci

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{T},$$

dla pewnych współczynników a_k. We wzorze tym utożsamiliśmy punkt (a, b) na okręgu $\mathbb{T}$ z liczbą zespoloną $a + bi$; wielomiany trygonometryczne można też jednak opisać bez liczb zespolonych (zob. margines).

Alternatywnie, punkt $(\cos t, \sin t)$ na okręgu $\mathbb{T}$ można utożsamić z liczbą $t \in [0, 2\pi]$. Wyrażone poprzez zmienną t wielomiany trygonometryczne mają postać:

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k \cos(kt) + e_k \sin(kt).$$

W oryginalnym sformułowaniu twierdzenie Marcinkiewicza mówi, że dla takiej funkcji oraz $p > 1$ zachodzą nierówności:

Odnotujmy, że dla $p = 1$ pierwsza nierówność w $(\star)$ pozostaje prawdziwa, ale druga nie, tzn. nie istnieje stała C_1 spełniająca odpowiednią nierówność dla dowolnego f.

$$(\star) \qquad \frac{1}{3}\|f\|_{\ell_n^p} \leqslant \|f\|_{L^p} \leqslant C_p\|f\|_{\ell_n^p},$$

przy czym stała C_p może zależeć od p, ale nie od f.

Szerszy punkt widzenia – przestrzenie Orlicza

Na pierwszy rzut oka nie widać związków między twierdzeniami Marcinkiewicza o próbkowaniu i interpolacji. Jednak takie związki istnieją. Aby to dostrzec, potrzebujemy spojrzeć na powyższe rezultaty w szerszym kontekście. Jednym z trzech głównych kierunków rozwoju teorii matematycznych, obok rozwiązywania aktualnych problemów i szukania analogii między istniejącymi rezultatami, jest uogólnianie dotychczasowych wyników na bardziej abstrakcyjne struktury. Przykładem tego trzeciego nurtu są przestrzenie Orlicza. Ich nazwa pochodzi od nazwiska polskiego matematyka Władysława Orlicza (1903–1990), wykształconego we Lwowie, a po wojnie działającego głównie w Poznaniu.

Jednym z najprostszych przykładów przestrzeni funkcji są przestrzenie Lebesgue'a $L^p(\mathbb{T})$. Dla zadanego $p \geqslant 1$ przestrzeń $L^p(\mathbb{T})$ to zbiór tych wszystkich funkcji f określonych na $\mathbb{T}$, dla których zdefiniowana wcześniej wielkość $\|f\|_{L^p}$ jest skończona. Jak już wspomnieliśmy, wielkość tę można wykorzystać do opisu geometrii przestrzeni L^p, gdyż posiada ona kilka ważnych własności składających się na definicję *normy* (zob. margines).

Nieujemną funkcję $f \mapsto \|f\|$ nazywamy normą, jeśli dla dowolnych f, g oraz $a \in \mathbb{R}$ spełnia warunki:
(n1) $\|f\| = 0 \iff f = 0$,
(n2) $\|a \cdot f\| = |a| \cdot \|f\|$,
(n3) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.
Więcej o normach można przeczytać w artykule Jarosława Górnickiego z Δ^5_{21} oraz w tekstach: $3 \leqslant \pi \leqslant 4$ i *Podejrzane twierdzenie o ciągach* z Δ^6_{21}.

Jak można uogólnić powyższą definicję? Pewnie na wiele sposobów, ale jednym z ważnych uogólnień są wspomniane już przestrzenie Orlicza. Idea polega na zastąpieniu występującej w definicji $L^p(\mathbb{T})$ funkcji (rosnącej, wypukłej) $t \mapsto t^p$ przez inną (rosnącą, wypukłą) funkcję φ, którą będziemy nazywać N*-funkcją*. Jako zbiór przestrzeń Orlicza $L^\varphi(\mathbb{T})$ będzie zawierać wszystkie funkcje f, dla których średnia z $\varphi(|f|)$ jest skończona, czyli $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f|) < \infty$.

By nadać $L^\varphi(\mathbb{T})$ jakąś geometrię, powinniśmy jeszcze zdefiniować odpowiednią normę. W tym przypadku nie możemy jednak powtórzyć zabiegu podnoszenia do potęgi $1/p$ (bo czym miałaby być potęga $1/\varphi$?). Zamiast tego zwróćmy uwagę, że w przypadku L^p zachodzi równoważność: norma $\|f\|_{L^p}$ nie przekracza 1 wtedy i tylko wtedy, gdy średnia z $|f|^p$ nie przekracza 1. Analogiczną równoważność możemy zapostulować dla L^φ:

$$\|f\|_{L^\varphi} \leqslant 1 \quad \iff \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(|f|) \leqslant 1.$$

Z warunku (n2) na marginesie wynika, że istnieje najwyżej jedna norma $\|\cdot\|_{L^\varphi}$ o powyższej własności (zwykło się ją nazywać normą Luxemburga). Da się ją też zapisać jawnym wzorem:

$$\|f\|_{L^\varphi} = \inf\Big\{\lambda > 0 : \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi(|f|/\lambda) \leqslant 1\Big\}.$$

Na potrzeby dalszej części będziemy zakładać, że φ jest funkcją wypukłą i rosnącą, a także $\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} = 0$ oraz $\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t} = \infty$, a więc φ jest tak zwaną N–funkcją. Przyjmiemy ponadto, że zachodzi warunek Δ_2: istnieje stała $D > 0$ taka, że $\varphi(2t) \leqslant D\varphi(t)$ dla wszystkich $t > 0$.

Uwaga dla ekspertów: warunek Δ_2 gwarantuje, że zdefiniowana wcześniej klasa L^φ jest przestrzenią liniową. Warunek Δ_2 nie jest spełniony np. dla N–funkcji $\varphi(t) = e^t - t - 1$; w tym przypadku nietrudno znaleźć funkcję f, dla której średnia z $\varphi(|f|)$ jest skończona, ale średnia z $\varphi(|2f|)$ już nie.

Próbkowanie w przestrzeni Orlicza a interpolacja

Wiele dotychczasowych rezultatów dotyczących przestrzeni L^p zostało bądź też zostanie uogólnionych na przestrzenie Orlicza L^φ. Także autor tego artykułu wraz z Michałem Wojciechowskim starali się uogólnić twierdzenie Marcinkiewicza o próbkowaniu na przypadek przestrzeni Orlicza, czyli zastąpić pojawiającą się w klasycznym sformułowaniu tego twierdzenia funkcję $t \mapsto t^p$ przez N–funkcję. A dokładniej, odpowiedzieć na pytanie:

Dla jakich N–funkcji zachodzą nierówności $(\star)$
z twierdzenia Marcinkiewicza o próbkowaniu?

A. Pawlewicz, M. Wojciechowski, *Marcinkiewicz sampling theorem for Orlicz spaces*, Positivity, volume 26, 2022.

Czytelnika zainteresowanego wyczerpującą odpowiedzią zachęcam do przeczytania naszej wspólnej pracy (szczegóły na marginesie), a tutaj przytoczę dwa – być może zaskakujące – wyniki na ten temat. W analogii do przypadku L^p, wprowadźmy normę Orlicza opartą na próbce $2n+1$ punktów:

$$\|f\|_{\ell_n^\varphi} \leqslant 1 \quad \iff \quad \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \varphi(|f(x_{n,k})|) \leqslant 1.$$

Prawdziwe są wówczas następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1 (pierwsza nierówność). *Dla dowolnej N–funkcji φ spełniającej warunek Δ_2 oraz dowolnego wielomianu trygonometrycznego f stopnia n zachodzi nierówność* $\frac{1}{3}\|f\|_{\ell_n^\varphi} \leqslant \|f\|_{L^\varphi}$.

Twierdzenie 2 (druga nierówność). *Dla dowolnej N–funkcji φ spełniającej warunek Δ_2 następujące warunki są równoważne:*

1. *Istnieje stała $C_\varphi > 0$ taka, że dla dowolnego n oraz dowolnego wielomianu trygonometrycznego f stopnia n zachodzi nierówność $\|f\|_{L^\varphi} \leqslant C_\varphi \|f\|_{\ell_n^\varphi}$.*
2. *Istnieje $p > 1$ takie, że każdy operator liniowy T (którego argumentami i wartościami są funkcje na $\mathbb{T}$), który jest słabego typu $(1,1)$ i (p,p), jest również ciągły jako operator $T\colon L^\varphi(\mathbb{T}) \to L^\varphi(\mathbb{T})$.*

Z konieczności, jako objaśnienie założenia „słabego typu” niech wystarczy nam, że T zachowuje się „przyzwoicie” na przestrzeniach L^1 i L^p. Istotne jest jednak to, że warunek 2 to dokładnie sformułowanie twierdzenia Marcinkiewicza o interpolacji, w którym przestrzeń L^φ zajmuje miejsce „pośredniej” przestrzeni L^r $(1 < r < p)$. Okazuje się więc, że w świecie przestrzeni Orlicza twierdzenie o próbkowaniu jest niejako *równoważne* twierdzeniu o interpolacji!

Modele Wszechświata dla początkujących Część 2: Upraszczamy, ile się da

*Szymon CHARZYŃSKI**

* Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

W Internecie krąży wiele sentencji, których autorstwo (nie zawsze słusznie) przypisuje się Albertowi Einsteinowi. Jedną z nich jest: “Make everything as simple as possible, but not simpler”. (Wszystko należy upraszczać, jak tylko się da, ale nie bardziej). Jest to prawdopodobnie *uproszczona* wersja zdania z wykładu Einsteina z 1933 roku, które brzmi: “It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience”.

W poprzednim numerze *Delty* analizowaliśmy ruch mrówek po rozciągającej się nici. Taka jednorodnie rozciągająca się na całej długości nić jest pomocna jako analogia naszego rozszerzającego się Wszechświata. Z obserwacji wiemy, że galaktyki oddalają się od nas, przy czym prędkość oddalania jest proporcjonalna do odległości danej galaktyki. Tę proporcjonalność nazywamy *prawem Hubble'a–Lemaître'a*. Jeżeli na nici postawimy kropki, to z punktu widzenia jednej wybranej kropki wszystkie inne będą się od niej oddalały zgodnie z prawem Hubble'a–Lemaître'a. Tę analogię można uogólniać na wyższe wymiary: możemy wyobrażać sobie kropki na powierzchni nadmuchiwanego balonu albo rodzynki w rosnącym cieście.

Analogie są pouczające, ale trzeba z nimi uważać. Jeżeli chcemy utrzymać stały współczynnik proporcjonalności między prędkością a odległością, to jeśli nić będzie wystarczająco długa, dojdziemy nieuchronnie do punktu na nici, który będzie się oddalał z prędkością większą od prędkości światła (prędkość tę zwyczajowo oznaczamy przez c). Jest oczywiste, że doświadczenia z nicią, która w przestrzeni rozciąga się w ten sposób, nie da się wykonać. Jest to sprzeczne z naszą wiedzą skodyfikowaną w formie szczególnej teorii względności. Jednak astronomowie twierdzą, że obserwują obiekty oddalające się od nas z prędkością większą od c. Takiego zjawiska nie da się opisać jako ruchu galaktyk w przestrzeni z taką prędkością. Rozszerzającego się Wszechświata nie da się opisać w ramach szczególnej teorii względności. To z przestrzenią pomiędzy nami a tą galaktyką dzieje się coś, co powoduje, że odległość do galaktyki rośnie tak szybko. Czasoprzestrzeń nie jest statyczną sceną, na której rozgrywa się historia Wszechświata, ale sama jest dynamicznym obiektem, który podlega ewolucji, tak jak opisuje to ogólna teoria względności Einsteina (OTW). Jak się wkrótce przekonamy, aby uratować naszą analogię, musimy nić utożsamić z przestrzenią, która sama się rozciąga, a nie z czymś, co w przestrzeni się porusza. To rozróżnienie jest kluczowe.