„Wymowne” ciągi

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Jedną z popularnych łamigłówek logiczno-liczbowych jest wskazanie kolejnego wyrazu zadanego ciągu. Czytelnik lubiący takie zagadki może na podstawie podanych poniżej początkowych wyrazów

$$1, 2, 3, 4, 5, 11, 13, 22, 101, 10, 12, 14\ldots$$

odgadnąć trzy kolejne. Rozwiązanie tej nieco trudniejszej łamigłówki zamieszczamy na stronie 6.

W tym artykule interesować nas będzie jeden z ciekawszych ciągów-zagadek, opisany oraz zbadany przez Johna Conwaya. Załóżmy, że dany jest pewien zestaw cyfr, na przykład 55 – jest to jednocześnie pierwszy element konstruowanego ciągu. Ciąg ten składa się z dwóch „piątek” i obie liczby, 2 i 5, wymówione przy opisie pierwszego wyrazu zestawiamy do drugiego wyrazu konstruowanego ciągu: 25. Ten nowy zestaw to jedna „dwójka” i jedna „piątka”, czyli 1215. Każdy kolejny element konstruowanego ciągu powstaje zawsze przez wypowiedzenie poprzedniego i zapisanie wszystkich cyfr wypowiedzianych. Reguła ta prowadzi więc do następujących pięciu sekwencji:

John Conway (1937–2020) znany jest między innymi jako twórca koncepcji automatów komórkowych, a w szczególności ich koronnego przykładu – Gry w Życie (Game of Life).

Polecamy artykuł pt. *John Horton Conway (1937–2020)* zamieszczony w Δ^7_{21}.

$$55, \quad 25, \quad 1215, \quad 11121115, \quad 31123115.$$

Najpopularniejszą formą powyższego ciągu jest ten zaczynający się od 1 i tylko takim przypadkiem będziemy się dalej zajmować. Ciąg „generowany” przez 1 opisaną wyżej metodą to:

O ciągu Conwaya pisał w *Delcie* również Wojciech Czerwiński, w artykule *Dziwny ciąg*, Δ^{11}_{21} .

$$1, \quad 11, \quad 21, \quad 1211, \quad 111221, \quad 312211, \quad 13112221, \quad 1113213211.$$

Ten ciąg jest przykładem tak zwanych **ciągów „patrz i mów”**, to jest ciągów, których strona werbalna odgrywa istotną rolę w konstrukcji.

Na potrzeby artykułu wprowadzimy teraz odpowiednią notację oraz terminologię. Niech $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oznacza ciąg otrzymany z danej sekwencji początkowej $L = L_0$ (u nas $L = 1$) po n powtórzeniach procedury „patrz i mów”. Załóżmy, że dana jest pewna sekwencja cyfr S, którą można podzielić na dwie niepuste sekwencje A i B (co zapisujemy $S = AB$) w taki sposób, że $S_n = A_nB_n$ dla wszystkich $n \geqslant 0$, a więc takie, które w kolejnych iteracjach procedury „patrz i mów” pozostają od siebie niezależne. Taki podział oznaczymy przez $S = A * B$ i mówimy wtedy, że S jest **związkiem** A i B. Dla przykładu, zauważmy, że jeśli $L = 1$, to $L_1 \neq 1 * 1$ (choć $L_1 = 11$), gdyż $L_2 \neq L_1L_1$. Każdy ciąg nieposiadający rozkładu na dwa niepuste niezależne podciągi nazywamy **pierwiastkiem**.

Conway zauważył, że jeśli $L_0 = 1$, to wtedy od pewnego momentu każdy element ciągu „patrz i mów” $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest związkiem pierwiastków pochodzących z pewnej ustalonej grupy 92 pierwiastków. W przypadku ogólnym (gdy L_0 jest dowolne) sytuacja okazuje się analogiczna – możliwych pierwiastków również będzie skończenie wiele, ale nie muszą one być takie same, jak pierwiastki z przypadku $L_0 = 1$.

Jak łatwo się przekonać, jeśli zmienimy postać początkowej sekwencji, na przykład przyjmiemy $L = 22$, to $L_n = 22$ dla wszystkich $n \geqslant 0$. Gdy $L = 4$, to w kolejnych wyrazach ciągu $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zawsze będzie obecna cyfra 4, która nie występuje w żadnym wyrazie ciągu z warunkiem $L_0 = 1$. Jeśli teraz L_0 jest pustą sekwencją cyfr, to wszystkie kolejne L_n również będą puste (nie ma czego wymawiać).

Wspomnianym 92 pierwiastkom Conway nadał nazwy pierwszych 92 pierwiastków z tablicy Mendelejewa (od Helu do Uranu). Nie oznacza to jednak, że każda sekwencja cyfr daje się podzielić na pierwiastki – rozważając kolejne wyrazy ciągu „patrz i mów” dla $L_0 = 1$,

$$1, \quad 11, \quad 21, \quad 1211, \quad 111221, \quad 312211, \quad 13112221, \quad 1113213211,$$

dopiero ostatni z wyżej podanych wyrazów jest związkiem pierwiastków: 11132 oraz 13211. Sekwencje takie jak

$$1, \quad 11, \quad 21, \quad 1211, \quad 111221, \quad 312211, \quad 13112221,$$

czyli niedające się rozłożyć na związek 92 pierwiastków, możemy określić mianem egzotycznych.

Powyższy opis może nieco przypominać proces Wielkiego Wybuchu – na początku było niewiele egzotycznej materii, która jednak po pewnym (niedługim w skali kosmicznej) czasie przekształciła się w znaną nam materię cząsteczkową, zbudowaną z podstawowych pierwiastków. Z tego też powodu dla ciągów „patrz i mów” formułuje się twierdzenie o niezwykłej nazwie.

Twierdzenie kosmologiczne. *Wszystkie egzotyczne pierwiastki ulegają rozpadowi (przekształceniu) na związki podstawowych pierwiastków.*

Podstawowe pierwiastki ulegają ciągłym przekształceniom między sobą, jednak to przekształcenie nie jest „jeden do jednego" – zdarza się, że pojedynczy niezależny człon w kolejnym kroku „rozpada się" na kilka innych pierwiastków. Takim przykładem jest 13221133122211332, który przechodzi na związek aż 6 pierwiastków:

$$1113222 * 12 * 3113 * 22 * 12 * 312.$$

Zdarzają się również inne przypadki – pierwiastek 11131221131211 „zawiera się" w pierwiastku 111312211312113211 i oba ewoluują zupełnie inaczej. Jedne pierwiastki mogą przekształcać się w inne, na przykład 3 przechodzi na 13 (oba są pierwiastkami). Najdłuższym przykładem jest złożony z 34 cyfr:

$$1321132122211322212221121123222112,$$

który ewoluuje na pojedynczy pierwiastek

$$11131221131211322113321132211221121332211 2,$$

a ten ostatni rozpada się w kolejnym kroku na 3 inne pierwiastki. Ciekawostką jest również fakt, że istnieje dokładnie jeden pierwiastek zaczynający się od cyfry 2: jest nim 22. Jedynym jednocyfrowym pierwiastkiem jest wspomniane już wcześniej 3.

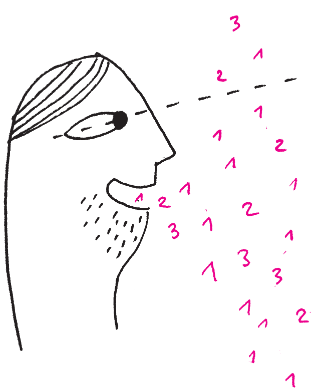
Udowodnimy teraz kilka własności ciągów „patrz i mów". Dla ułatwienia będziemy dalej używać oznaczenia $|S|$ na długość (liczbę cyfr) ciągu S. Jeśli jakaś cyfra x powtarza się w sekwencji kilka razy po sobie, będziemy pisać x^n, gdzie n to liczba powtórzeń. Na przykład 2221111 zapisuje się w skrócie jako $2^3 1^4$.

Jeśli dana jest na przykład sekwencja $S = x^n y^m$, to wtedy zgodnie z przyjętą notacją mamy $S_1 = nxmy$.

Jeśli teraz chcemy podkreślić, w jaki sposób została otrzymana nowa sekwencja cyfr, wstawiamy średniki między odpowiednimi cyframi, wskazując, że cyfry między średnikami reprezentują „przeczytanie" fragmentu poprzedniego ciągu, na przykład:

$$1, \quad 11, \quad 21, \quad 12;11, \quad 11;12;21, \quad 31;22;11.$$

Nawiasy kwadratowe [oraz] oznaczają odpowiednio faktyczny początek lub koniec elementu ciągu lub pierwiastka. Notacja z nawiasami kwadratowymi jest przydatna, gdy chcemy odróżnić całe pierwiastki od ich fragmentów, które mogą ewoluować zupełnie inaczej. Zapis $\neq n$ oznacza, że dana cyfra jest różna od n (może być równa 0). Wobec tego napis $[1^2 2^2 (\neq 2)^{\neq 2}]$ oznacza sekwencję, która zaczyna się dwiema jedynkami, następnie są w niej dwie dwójki, kończy się zaś cyfrą różną od 2 i ta cyfra nie powtarza się 2 razy (może się powtarzać mniej, może więcej razy).



Podstawowe własności. Niech A będzie dowolnym wyrazem ciągu „patrz i mów", w którym żadna cyfra nie powtarza się więcej niż 9 razy pod rząd. Wtedy:

1. podciągi postaci $nz;mz$, x^4 (i wyższe potęgi) i x^3y^3 nie występują w A_1;

2. cyfra 4 nie może się pojawić w A_2, o ile nie było jej w A_1;

3. podciąg $3x3$ nie może się pojawić w A_2.

Dowód:
1. Ciągi postaci $nz;mz$ mogą pochodzić jedynie z $n+m$ kolejnych cyfr w A, które zapisalibyśmy w postaci z^{n+m} i przeczytali jako $(n+m)z$, a nie jako $nz;mz$.

Jeśli A_1 zawiera ciąg x^4, czyli $xxxx$, to jest on albo postaci $xx;xx$, albo postaci $ax;xx;xb$ – oba warianty są niemożliwe na mocy poprzedniego akapitu.

Niech teraz w A_1 występuje sekwencja x^3y^3, czyli $xxxyyy$. Wtedy albo jest ona postaci $xx;xy;yy$, albo jest fragmentem sekwencji $kx;xx;yy;yl$ dla pewnych k i l. W obu przypadkach obecny jest jednak układ typu $nzmz$ ($xy;yy$ w pierwszym przypadku i $kx;xx$ w drugim przypadku), co, jak już wiemy, jest niemożliwe.

2. Cyfra 4 w A_2 może pochodzić jedynie od fragmentu postaci x^4 sekwencji A_1, co stanowiłoby sprzeczność na mocy punktu (1).

3. Sekwencja $3x3$ w ciągu A_2 może pochodzić jedynie z wypowiedzenia ciągu cyfr w A_1 postaci x^3y^3 dla pewnego y, ale takie ciągi nie mogą wystąpić w A_1 na mocy (1).

Na koniec przedstawimy jeszcze, bez dowodu, kilka własności ciągów „patrz i mów". Odniesiemy się w nich do zachowania początku, końca i miejsca wiązania pierwiastków w danej sekwencji.

Twierdzenie o początkach. *Niech R będzie dowolnym fragmentem sekwencji pochodzącej z L_n dla $n \geqslant 2$ (dopuszczamy pusty R). Wtedy dla dostatecznie dużych k sekwencje R_k albo są postaci:*

- $[\,]$, $\quad [22]$,

albo ich początki zapętlają się do jednego z dwóch cykli:

- $[1^1X^1 \to [1^3 \to [3^1X^{\neq 3} \to \cdots$
- $[2^21^1X^1 \to [2^21^3 \to [2^23^1X^{\neq 3} \to \cdots$

Tutaj i w innych miejscach symbol $\to$ oznacza, że dany fragment ewoluuje do kolejnego.

Rozwiązanie zadania M 1734.
Ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1})$ nazwijmy *dobrym*, jeśli 1 występuje częściej wśród $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}$ niż wśród $x_1, x_2, \ldots, x_n$. W pozostałych przypadkach ciąg jest *zły*. Ciągowi $s = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1})$ przypiszmy ciąg

$$s^* = (1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_{2n+1}).$$

Przypuśćmy, że 1 występuje a razy wśród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz b razy wśród $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}$. Wówczas występuje ona $n - a$ razy wśród liczb

$$1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n$$

oraz $n + 1 - b$ razy wśród liczb

$$1 - x_{n+1}, 1 - x_{n+2}, \ldots, 1 - x_{2n+1}.$$

Zauważmy jednak, że

$$a < b \iff n - a \geqslant n + 1 - b,$$

więc s jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy s^* jest zły. Wobec tego przypisanie $s \mapsto s^*$ jest bijekcją między zbiorami ciągów dobrych i złych, a to oznacza, że dokładnie połowa ciągów jest dobra.

Twierdzenie o końcach. *Koniec dowolnej sekwencji R dla dowolnego L_0 ostatecznie wpada w jeden z trzech cykli:*

- $2^2]$
- $2311322113212221] \to 21321132221131211321 1] \to$
  $\to 2111312211332211311122 1131221] \to$
  $\to 212322211331222113112211]$
- $23122113222122211211232221 1n] \to 21311222113321132211221121332211n]$, *dla* $(n > 1)$.

Twierdzenie o podziale. *Sekwencja $S = AB$ dzieli się na dwa niezależne pierwiastki $S = A * B$ wtedy i tylko wtedy, gdy A lub B jest pusty lub obie sekwencje są jedną z podanych niżej (tutaj $n \geqslant 4$ oraz $m \leqslant 3$):*

A	B						
$n]$	$[m$						
$2]$	$[1^1X^1$	*lub*	$[1^3$	*lub*	$[3^1X^{\neq 3}$	*lub*	$[n^1$
$\neq 2]$	$[2^21^1X^1$	*lub*	$[2^21^3$	*lub*	$[2^23^1X^{\neq 3}$	*lub*	$[2^2n^{0 \textit{ lub } 1}$

Dowody zaprezentowanych faktów są dość techniczne; można je odnaleźć w pracy Conwaya *The weird and wonderful chemistry of audioactive decay* z 1987 roku.

Komentarz do rozwiązania zadania 1064

Czytelnik Dociekliwy na pewno nie jest zadowolony z podanego przez nas rozwiązania zadania 1064.

Zastosowaliśmy w nim wzory mechaniki klasycznej. Być może takie przybliżenie jest wystarczająco dokładne w przypadku mas i energii występujących w treści zadania, ale Czytelnik Dociekliwy chciałby, oczywiście, znać pełne rozwiązanie, poprawne także wtedy, gdy ciepło reakcji ma wartość porównywalną z masami substratów i produktów. Spełniając słuszne oczekiwania Czytelnika Dociekliwego, przedstawiamy poniżej pełne rozwiązanie uwzględniające efekty relatywistyczne.

Podczas reakcji spełnione są prawa zachowania pędu i energii: w układzie laboratorium po zajściu reakcji sumaryczny pęd produktów będzie równy pędowi deuteronu przed reakcją. Z pędami produktów związana jest też ich energia kinetyczna. Tylko w układzie środka masy zderzających się jąder sumaryczny pęd przed i po reakcji jest równy zeru (tak definiujemy układ środka masy). Oznacza to, że warunkiem zajścia reakcji jest, by sumaryczna energia w układzie środka masy była równa sumie energii spoczynkowych produktów, która jest o $|Q|$ większa od sumy mas spoczynkowych substratów.

W zderzeniach cząstek o energiach całkowitych E_i i pędach $\vec{p_i}$ energia dostępna w środku masy E_{CM} spełnia równanie:

$$E_{CM}^2 = \Big(\sum_i E_i\Big)^2 - \Big(\sum_i \vec{p_i}c\Big)^2.$$

W powyższym wzorze c oznacza wartość prędkości światła, a prawa strona równania jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, a ze względu na spełnienie praw zachowania pędu i energii ma tę samą wartość przed reakcją i po niej.

Zastosujmy dotychczasowe rozważania ogólne do podanej reakcji. Oznaczmy masę deuteronu (pocisku) przez m, a masę jądra ^{14}N (tarczy) przez M. Brakuje nam pędu deuteronu o energii kinetycznej E_k. Całkowita energia deuteronu: $E = mc^2 + E_k$. Z drugiej strony: $E = \sqrt{m^2c^4 + (pc)^2}$. Otrzymujemy: $p^2c^2 = E_k^2 + 2mc^2E_k$. Podstawiamy do równania określającego energię dostępną w układzie środka masy w przypadku, gdy produkty reakcji w tym układzie spoczywają:

$$\big((m + M)c^2 + E_k\big)^2 - (E_k^2 + 2mc^2E_k) = \\ = \big((M + m)c^2 + |Q|\big)^2.$$

Po rozwiązaniu powyższego równania względem E_k otrzymujemy wartość minimalnej energii kinetycznej deuteru (w układzie laboratorium):

$$E_k = \frac{m + M}{M}|Q| + \frac{Q^2}{2Mc^2}.$$

Dla reakcji podanej w treści zadania wynik pełnego rozwiązania różni się od rozwiązania przybliżonego (z zastosowaniem wzorów mechaniki klasycznej) o wyraz: $Q^2/(2Mc^2) \approx 4 \cdot 10^{-4}$ MeV. Tak mała wartość poprawki w pełni usprawiedliwia zastosowanie „przybliżenia klasycznego”.

Uwaga: Użyty w treści zadania termin „ciepło reakcji” odnosi się do wielkości mikroskopowej dotyczącej pojedynczego zderzenia. W chemii „ciepło reakcji” definiowane jest dla układów makroskopowych, a jego wartość zależy od warunków, w jakich przebiega reakcja (np. pod stałym ciśnieniem czy w stałej objętości).

Andrzej MAJHOFER