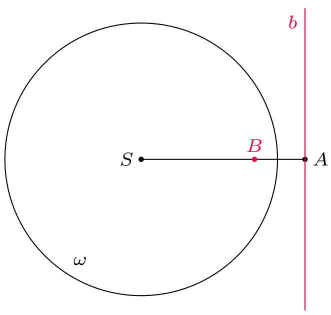
Na biegunach

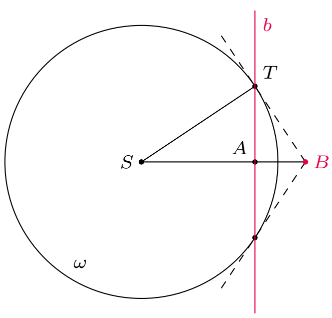
Bartłomiej BZDĘGA

Ustalmy okrąg ω o środku S i promieniu r. Punkty A i B leżą na wspólnej półprostej z początkiem w S. Prosta b przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do tej półprostej (rys. 1). Jeśli $|AS| \cdot |BS| = r^2$, to mówimy, że zachodzi *odpowiedniość biegunowa* $\mathcal{B}_\omega(B, b)$ punktu B i prostej b względem okręgu ω. Mówimy również, że punkt B jest *biegunem* prostej b, a prosta b jest *biegunową* punktu B względem okręgu ω.



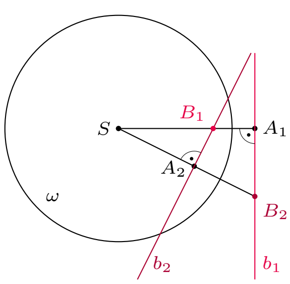
Rys. 1

Dla punktu B leżącego na zewnątrz okręgu ω biegunową b możemy skonstruować, prowadząc z punktu B proste styczne do okręgu ω. Wówczas biegunowa b przechodzi przez oba punkty styczności (rys. 2). Wynika to z podobieństwa trójkątów SAT i STB: $\frac{|SA|}{|ST|} = \frac{|ST|}{|SB|}$, więc $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2 = r^2$. Oczywiście działa to w obie strony. Mając daną sieczną okręgu nieprzechodzącą przez jego środek, możemy wyznaczyć jej biegun – jest to punkt przecięcia stycznych poprowadzonych z punktów przecięcia okręgu sieczną.



Rys. 2

Wzajemność biegunowa. Rozważmy odpowiedniość biegunową $\mathcal{B}_\omega(B_1, b_1)$ i niech B_2 będzie dowolnie wybranym punktem na prostej b_1. Przez A_2 oznaczmy rzut prostokątny punktu B_1 na prostą SB_2 (rys. 3). Z podobieństwa trójkątów SA_1B_2 i SA_2B_1 wynika równość $\frac{SA_1}{SB_2} = \frac{SA_2}{SB_1}$, a zatem $SA_2 \cdot SB_2 = SA_1 \cdot SB_1 = r^2$, więc biegunowa b_2 punktu B_2 przechodzi przez punkt A_2. Ponadto $b_2 \perp SB_2$, więc $B_1 \in b_2$. Wynika z tego następujące *prawo wzajemności biegunowej*: biegun prostej b_1 leży na prostej b_2 wtedy i tylko wtedy, gdy biegun prostej b_2 leży na prostej b_1. Jest ono znane również jako *twierdzenie La Hire'a.*



Rys. 3

Dualność biegunowa. Rozważmy odpowiedniości biegunowe $\mathcal{B}_\omega(B_i, b_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas:

- jeśli proste $b_1, b_2, \ldots, b_n$ przecinają się w jednym punkcie B, to na mocy prawa wzajemności biegunowej ich bieguny $B_1, B_2, \ldots, B_n$ leżą na jednej prostej b, która jest biegunową punktu B;
- w drugą stronę, jeżeli punkty $B_1, B_2, \ldots, B_n$ leżą na jednej prostej b, to na mocy prawa wzajemności biegunowej ich biegunowe $b_1, b_2, \ldots, b_n$ przechodzą przez punkt B, który jest biegunem prostej b.

Ta własność pozwala w niektórych zadaniach zamienić tezę na równoważną: współliniowość punktów na współpękowość prostych i *vice versa*. Bywa, że to upraszcza rozwiązanie zadania.

Zadania

1. Ustalmy okrąg ω o środku O i rozłączną z nim prostą k. Niech X będzie dowolnym punktem na prostej k. Punkty przecięcia okręgu ω i okręgu o średnicy OX wyznaczają prostą ℓ_X. Udowodnić, że wszystkie otrzymane w ten sposób proste ℓ_X są współpękowe.
2. Punkt I jest środkiem okręgu o wpisanego w trójkąt ABC, a punkty D, E, F są punktami styczności tego okręgu odpowiednio do odcinków BC, CA, AB. Punkt P wybrano w taki sposób, by punkt F leżał na odcinku EP. Okrąg o średnicy IP przecina okrąg o w punktach Q i R. Dowieść, że prosta QR przechodzi przez punkt A.
3. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt różnoboczny ABC, styczny jest do boków BC, CA, AB w punktach, odpowiednio, D, E, F. Punkt P leży na prostej BC i spełnia warunek $PI \perp AD$. Punkt Q leży na prostej CA i spełnia warunek $QI \perp BE$. Punkt R leży na prostej AB i spełnia warunek $RI \perp CF$. Dowieść, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.
4. W czworokąt $ABCD$ wpisany jest okrąg o środku I, styczny do odcinków AB, BC, CD w punktach, odpowiednio, K, L, M. Prosta KL przecina prostą CD w punkcie P, a prostą BM w punkcie Q. Dowieść, że $BP \perp IQ$.

Wskazówki do zadań

1. Uzasadnić odpowiedniość biegunową $\mathcal{B}_\omega(X, \ell_X)$ i skorzystać z dualności biegunowej dla okręgu ω.
2. Wykazać, że punkt P jest biegunem prostej QR i skorzystać z prawa wzajemności biegunowej dla okręgu o.
3. Punkty P, Q, R są biegunami prostych, odpowiednio, AD, BE, CF. Zastosowanie dualności biegunowej i twierdzenia Cevy kończy dowód.
4. Wystarczy udowodnić, że punkt Q jest biegunem prostej BP względem okręgu wpisanego w $ABCD$. Korzystając ze wzajemności biegunowej dowodzimy kolejno, że: punkt B leży na biegunowych punktów P i Q, punkt P jest biegunem prostej MB, punkt P leży na biegunowej punktu Q.