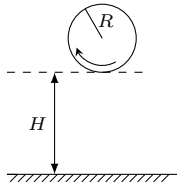


Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2023

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl



Rys. 1

Zadania z fizyki nr 750, 751

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

750. Koło rowerowe spada swobodnie z wysokości H (rys. 1) i po odbiciu podskakuje na wysokość h . Koło to rozkręcono do prędkości kątowej ω_0 i puszczone swobodnie z tej samej wysokości. Pod jakim kątem odbije się ono od podłoża? Współczynnik tarcia między kołem a podłożem wynosi μ , promień koła R . Zakładamy, że cała masa koła skupiona jest na jego obwodzie.

751. Kondensator płaski naładowany ładunkiem Q wypełnia płytka z dielektryka o stałej dielektrycznej ε . Powierzchnia okładek wynosi S , odległość między okładkami jest równa d . Znaleźć energię zgromadzoną w dielektryku w wyniku jego polaryzacji. Przyjąć, że dielektryk jest niepolarny.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2022

Przypominamy treść zadań:

742. Mała drewniana kulka przymocowana jest za pomocą nierozciągliwej nici o długości $l = 30$ cm do dna cylindrycznego naczynia z wodą. Odległość środka dna do punktu zaczepienia nici $r = 20$ cm. Naczynie rozkręcono wokół osi pionowej przechodzącej przez środek dna. Przy jakiej prędkości kątowej nić odchyła się od pionu o kąt $\alpha = \pi/6$?

743. W obwodzie przedstawionym na rysunku 3 ze źródłem o sile elektromotorycznej U_0 i zaniedbywalnym oporze wewnętrznym połączone są szeregowo kondensatory o pojemnościach C i $3C$. Po zamknięciu klucza K równoległe do kondensatora o pojemności $3C$ dołączamy połączone szeregowo cewkę o indukcyjności L oraz idealną diodę. a) Znaleźć maksymalną wartość natężenia prądu płynącego przez cewkę. b) Jakie będzie napięcie na kondensatorze o pojemności C , gdy prąd przestanie płynąć przez cewkę? c) Ile czasu prąd będzie płynął przez cewkę?

742. Na kulkę działa siła naprężenia nici N , siła ciężkości $F_g = mg = V\rho g$, gdzie V jest objętością kulki, a ρ jej gęstością, oraz siła Archimedesesa F_A , czyli siła spowodowana ciśnieniem otaczającej wody (rys. 2). Gdy zastąpimy kulkę na nitce elementem wody, siła Archimedesesa nie zmienia się, a wypadkowa tej siły i ciężaru elementu wody będzie siłą dośrodkową

$$\vec{F}_A = V\rho_w(\vec{a}_d - \vec{g}),$$

gdzie ρ_w jest gęstością wody, \vec{a}_d przyspieszeniem dośrodkowym. Składowe siły Archimedesesa w kierunku poziomym i pionowym wynoszą odpowiednio:

$$(1) \quad F_{A1} = V\rho_w\omega^2(r - l \sin \alpha), \quad F_{A2} = V\rho_w g.$$

Równanie ruchu obrotowego drewnianej kulki na nitce ma postać:

$$(2) \quad \rho V \omega^2 (r - l \sin \alpha) = F_{A1} - N \sin \alpha,$$

a warunek równowagi sił w kierunku pionowym:

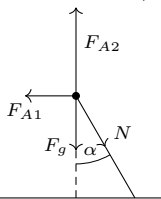
$$(3) \quad \rho V g = F_{A2} - N \cos \alpha.$$

Rozwiązując układ równań (1) – (3), otrzymujemy

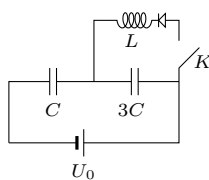
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{A1}}{F_{A2}} = \frac{\omega^2 (r - l \sin \alpha)}{g}.$$

Wypadkowa siła Archimedesesa działa więc w kierunku zgodnym z kierunkiem nici, a szukana prędkość kątowa

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{(r - l \sin \alpha)}} = \frac{10,6}{s}.$$



Rys. 2



Rys. 3

743. Przed zamknięciem klucza ładunki na obu kondensatorach są jednakowe i wynoszą $q_0 = \frac{3CU_0}{4}$.

(a) Po zamknięciu klucza, gdy prąd płynący przez cewkę osiąga maksymalną wartość, napięcie na cewce i na kondensatorze o pojemności $3C$ staje się równe

zeru, a ładunek na kondensatorze o pojemności C osiąga w tym momencie wartość CU_0 . Przez źródło przepłynął ładunek $CU_0 - q_0 = \frac{CU_0}{4}$. Zgodnie z zasadą zachowania energii

$$-\frac{3CU_0^2}{8} + \frac{CU_0^2}{2} + \frac{LI_{\max}^2}{2} = U_0 \frac{CU_0}{4}.$$

Stąd maksymalne natężenie prądu płynącego przez cewkę wynosi

$$I_{\max} = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

(b) Oznaczmy przez U napięcie na kondensatorze o pojemności C , gdy prąd przez cewkę już nie płynie. Napięcie na drugim kondensatorze wynosi wtedy $U_0 - U$. Bilans energetyczny dla procesu od chwili zamknięcia klucza do chwili, gdy prąd przestaje płynąć przez cewkę, ma postać:

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{3C(U_0 - U)^2}{2} - \frac{3CU_0^2}{8} = U_0 \left(CU - \frac{3CU_0}{4} \right),$$

stąd $U = U_0 \pm \frac{U_0}{4}$. Ponieważ $U > U_0$ (napięcie na kondensatorze o pojemności $3C$ jest ujemne), końcowe napięcie na kondensatorze o pojemności C wynosi

$$U = \frac{5U_0}{4}.$$

(c) Oznaczmy ładunki na kondensatorach o pojemnościach $3C$ i C w pewnej chwili badanego procesu odpowiednio przez q_1 i q_2 . Suma napięć na kondensatorach jest stała, zatem $\frac{\delta q_1}{3C} + \frac{\delta q_2}{C} = 0$. Gdy z kondensatora $3C$ odpłynie ładunek δq_1 , na kondensator C dopłynie ładunek $\delta q_2 = \frac{\delta q_1}{3}$, a przez cewkę przepłynie ładunek $\delta q = \frac{4\delta q_1}{3}$. Drugie prawo Kirchhoffa dla górnego oczka obwodu ma postać:

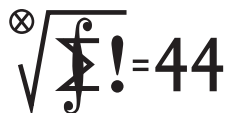
$$\frac{q_1}{3C} = -\frac{LdI}{dt} = -\frac{Ld^2q}{dt^2} = -\frac{4L}{3} \cdot \frac{d^2q_1}{dt^2}.$$

Ładunek q_1 spełnia równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{4CL} = 0.$$

Okres drgań wynosi $T = 4\pi\sqrt{LC}$, a szukany czas procesu $t = \frac{T}{2} = 2\pi\sqrt{LC}$.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2023

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 843 ($WT = 2,09$) i 843 ($WT = 1,59$) z numeru 6/2022

Jerzy Cisko	Wrocław	47,65
Stanisław Bednarek	Łódź	42,60
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Tomasz Wietecha	Tarnów	39,23
Paweł Najman	Kraków	38,88
Mikołaj Pater	Opole	38,30
Krzysztof Zygan	Lubin	38,26
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Radosław Kujawa	Wrocław	35,83
Janusz Olszewski	Warszawa	34,88
Norbert Porwol	Essen	34,16

Jerzy Cisko – przekroczenie 44 p. po raz 2⁴; drugi (w historii Ligi) uczestnik z takim osiągnięciem!

Widać też, że w bliskim czasie czeka nas zmasowane mijanie linii mety!

Zadania z matematyki nr 853, 854

Redaguje Marcin E. KUCZMA

853. Rozstrzygnąć, czy suma skończenie wielu czworokątów wklęsłych o rozłącznych wnętrzach może być wielokątem wypukłym (czworokąt wklęsły to taki, w którym jeden z kątów wewnętrznych jest większy od kąta półpełnego). Czy odpowiedź zmieni się, jeśli zamiast wklęsłych czworokątów będziemy rozważać wklęsłe pięciokąty?

854. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że liczba przedstawień n w postaci sumy dwóch nieujemnych liczb trójkątnych jest równa liczbie przedstawień liczby $4n + 1$ w postaci sumy kwadratów dwóch nieujemnych liczb całkowitych (utożsamiamy przedstawienia różniące się tylko kolejnością składników).

Zadanie 854 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2022

Przypominamy treść zadań:

845. Udowodnić nierówność dla liczb nieujemnych x_1, \dots, x_n oraz y_1, \dots, y_n :

$$\left(\sum_{i \neq j} x_i y_j\right)^2 \geq \left(\sum_{i \neq j} x_i x_j\right) \left(\sum_{i \neq j} y_i y_j\right)$$

(każda z trzech napisanych sum ma $n(n-1)$ składników odpowiadających wszystkim uporządkowanym parom (i, j) różnych numerów $i, j \in \{1, \dots, n\}$).

846. Ostrosłup ścięty, którego podstawami są podobne wielokąty o znanych polach A i B , został podzielony płaszczyznami π_1, \dots, π_{n-1} , równoległymi do podstaw, na n wielościanów o równych objętościach; płaszczyzna π_k leży między płaszczyznami π_{k-1} i π_{k+1} (dla $k = 1, \dots, n-1$), gdzie π_0, π_n to płaszczyzny zawierające, odpowiednio, podstawy o polach A, B . Obliczyć pole przekroju ostrosłupa każdą z płaszczyzn π_k .

845. Przyjmijmy oznaczenia

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad Q_y = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad T = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

i odnotujmy oszacowania:

$$(1) \quad Q_x \leq S_x^2, \quad Q_y \leq S_y^2, \quad T^2 \leq Q_x Q_y$$

(ostatnia zależność to nierówność Cauchy'ego-Schwarza).

Daną do udowodnienia nierówność przepisujemy w postaci

$$(2) \quad (S_x S_y - T)^2 \geq (S_x^2 - Q_x)(S_y^2 - Q_y),$$

po czym przekształcamy do postaci kolejno równoważnych:

$$S_x^2 Q_y + S_y^2 Q_x - 2S_x S_y T \geq Q_x Q_y - T^2;$$

$$(S_x \sqrt{Q_y} - S_y \sqrt{Q_x})^2 + 2S_x S_y (\sqrt{Q_x Q_y} - T) \geq$$

$$\geq (\sqrt{Q_x Q_y} - T)(\sqrt{Q_x Q_y} + T);$$

i wreszcie

$$(3) \quad (S_x \sqrt{Q_y} - S_y \sqrt{Q_x})^2 + (\sqrt{Q_x Q_y} - T)[2S_x S_y - \sqrt{Q_x Q_y} - T] \geq 0.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym to suma

$$2(S_x S_y - \sqrt{Q_x Q_y}) + (\sqrt{Q_x Q_y} - T),$$

której oba składniki są nieujemne (co widać z oszacowań (1)). To uzasadnia nierówność (3), więc i równoważną jej nierówność (2).

846. Przyjmijmy, że $A > B$. Rozważany ostrosłup ścięty powstał w wyniku przecięcia (płaszczyzną π_n) pełnego ostrosłupa o podstawie w płaszczyźnie π_0 i wierzchołku („czubku”) Z i odrzucenia części położonej po tej stronie płaszczyzny π_n co punkt Z .

Niech S_k będzie polem przekroju ostrosłupa płaszczyzną π_k (dla $k = 0, \dots, n$; dane są więc wartości $S_0 = A, S_n = B$) i niech V_k będzie objętością ostrosłupa o wierzchołku Z , którego podstawą jest ów k -ty przekrój; jego wysokość h_k to odległość punktu Z od płaszczyzny π_k .

Z warunku zadania wynika, że objętości V_0, \dots, V_n tworzą ciąg arytmetyczny. Wobec tego

$$(4) \quad V_k = \frac{n-k}{n} V_0 + \frac{k}{n} V_n \quad \text{dla } k = 0, \dots, n.$$

Rozważane ostrosłupy o wierzchołku Z są bryłami podobnymi. Stosunek pól $S_k : S_0$ to kwadrat skali podobieństwa $h_k : h_0$. Stąd

$$(5) \quad h_k = h_0 \sqrt{\frac{S_k}{S_0}} \quad \text{dla } k = 0, \dots, n.$$

Pamiętając szkolny wzór $V_k = \frac{1}{3} S_k h_k$, wstawiamy do wzoru (4) równość (5) (brana dla bieżącego wskaźnika k oraz dla $k = n$), mnożymy przez 3 i otrzymujemy

$$S_k h_0 \sqrt{\frac{S_k}{S_0}} = \frac{n-k}{n} S_0 h_0 + \frac{k}{n} S_n h_0 \sqrt{\frac{S_n}{S_0}}.$$

Proste przekształcenie (po skróceniu czynnika h_0 i powrocie do oznaczeń $S_0 = A, S_n = B$) daje odpowiedź na pytanie z zadania:

$$S_k = \left(\frac{n-k}{n} A^{3/2} + \frac{k}{n} B^{3/2}\right)^{2/3} \quad \text{dla } k = 0, \dots, n.$$