James Clerk Maxwell i pierścienie Saturna

*Mateusz DEMBNY**

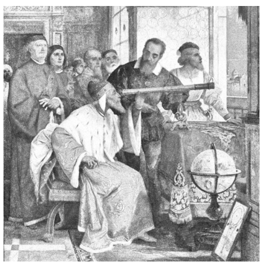
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Celem tego artykułu jest zainteresowanie Czytelnika historią obserwacji pierścieni Saturna, ze szczególnym uwzględnieniem wkładu Jamesa Clerka Maxwella (1831–1879) w wyjaśnienie natury tych pierścieni. Nazwisko Maxwella kojarzymy głównie z równaniami pola elektromagnetycznego oraz kinetyczną teorią ciepła, jednak jego wkład w wyjaśnienie struktury pierścieni Saturna jest równie doniosły i stanowi ostateczne rozwiązanie problemów postawionych przez XVII-wiecznych astronomów.

James Clerk Maxwell

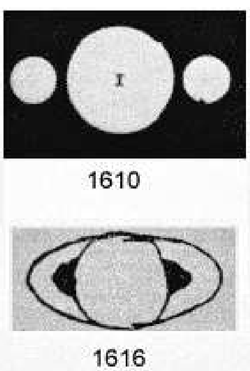
Odkrycie pierścieni Saturna

Saturn znany był już starożytnym, choć nie byli oni świadomi istnienia jego pierścieni. Pierwszym, który do obserwacji tej planety wykorzystał teleskop (w 1610 r.), był Galileusz (1564–1642), jednak z powodu prostoty swojego teleskopu nie był on w stanie określić, czym są pierścienie. Błędnie zgadywał, że po obu stronach Saturna znajdują się dwa duże księżyce! Dwa lata później, kiedy ponownie mu się przyjrzał, „księżyce" zniknęły – teraz wiemy, że za drugim razem patrzył na pierścienie, gdy były ustawione krawędzią, przez co były niedostrzegalne. Galileusz uznał, że jest to bardzo dziwne. W kolejnych latach ponownie zwrócił uwagę na Saturna i odkrył, że „księżyce" powróciły. Doszedł do wniosku, że pierścienie to pewnego rodzaju „ramiona".



25 sierpnia 1609 roku Galileusz zademonstrował weneckim prawodawcom jeden z pierwszych teleskopów

Lata później Christiaan Huygens (1629–1695) rozwiązał zagadkę „ramion" Saturna. Dzięki ulepszonej optyce teleskopu poprawnie wydedukował, że „ramiona" były w rzeczywistości pierścieniem. Swoje odkrycie opublikował w 1659 roku w dziele *Systema Saturnium.* Nie było to pierwsze odkrycie Huygensa związane z Saturnem – cztery lata wcześniej zaobserwował jego pierwszy księżyc – Tytana.



Szkice „księżyców" i „ramion" Saturna, z notatek Galileusza; odpowiednio z 1610 i 1616 roku

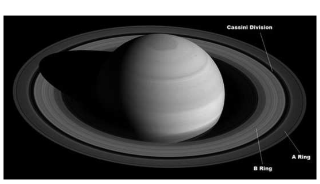
Kilka lat po odkryciu Huygensa Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) odkrył wąską szczelinę, która dzieli pierścień Saturna na dwie części. Pierścienie te nazwano A i B, a sama szczelina, nazwana później przerwą Cassiniego, to obszar o szerokości 4800 km. Jednak to nie koniec odkryć Cassiniego związanych z Saturnem. W latach 1671–1684 w obserwatorium paryskim, którego był założycielem, odkrył 4 inne księżyce tej planety: Japeta, Reę, Tetydę i Dione. Obserwacji tych dokonał za pomocą teleskopu refrakcyjnego z 2,5-calowym obiektywem pozwalającym na 90-krotne powiększenie obrazu.

Trzeci pierścień Saturna został odkryty niezależnie przez trzech uczonych. Pierścień C jako pierwszy odkrył George Bond (1825–1865) w Cambridge, Massachusetts, w Stanach Zjednoczonych, 15 listopada 1850 roku. Następnie William Dawes (1799–1868), nieświadomy odkrycia Bonda, zaobserwował ten pierścień 29 listopada tego samego roku w prywatnym obserwatorium w swoim domu na wsi – Haddenham w hrabstwie Buckinghamshire, w środkowej Anglii, a kilka dni później zaobserwował go jego przyjaciel William Lassel (1799–1880), również w domowym obserwatorium – w Liverpoolu, w północnej Anglii.

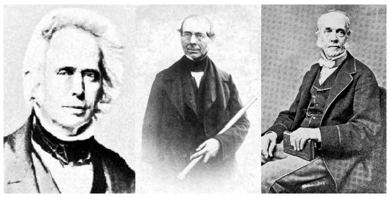
Christiaan Huygens (portret z 1671 r.)

Jednak te odkrycia nie odpowiedziały na kluczowe pytanie o strukturę pierścieni i ich ewentualną stabilność. Tym problemem, który umykał naukowcom przez ponad 200 lat, zajął się 25-letni Maxwell (w listopadzie 1856 r. objął profesurę na Marischal College w Aberdeen, w Szkocji).

Pytanie o naturę pierścieni Saturna nabrało w tym czasie szczególnego znaczenia, ponieważ stanowiło temat ogłoszonego przez St John's College w Cambridge (Wielka Brytania) konkursu do Nagrody Adamsa w 1857 roku. Należało odnieść się do hipotez na temat budowy pierścieni, to znaczy rozstrzygnąć, czy są one bryłami sztywnymi, strumieniem cząstek, czy płynem. Adams Prize jest jedną z najbardziej prestiżowych nagród przyznawanych przez Uniwersytet Cambridge. Jest ona przyznawana przez St John's College do dzisiaj, obecnie co roku, matematykowi z Wielkiej Brytanii za wybitne osiągnięcia w dziedzinie nauk matematycznych.



Przerwa Cassiniego



Od lewej:
G. Bond (prawdopodobnie), W. Dawes, W. Lassell

* Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego porównania zmiany wartości niektórych walut na stronie www.in2013dollars.com.

Maxwell poświęcił dwa lata na zbadanie tego problemu i udowodnił, że pierścienie składają się z wielu małych cząstek, z których każda niezależnie okrąża Saturna. W 1859 roku otrzymał £130 nagrody (równowartość ok. 100 000 zł w dzisiejszej walucie*) za esej *On the stability of the motion of Saturn's rings*, przy czym był jedynym uczestnikiem, który zrobił wystarczająco duże postępy, aby przesłać zgłoszenie.

Jego praca była tak szczegółowa i przekonująca, że kiedy George Airy (1801–1892) ją przeczytał, skomentował:

> *It is one of the most remarkable applications of mathematics to physics that I have ever seen.*
>
> Cytowane za [O'Connor, Robertson]

Prześledźmy podejście Maxwella do tego problemu, zawarte w jego pracy konkursowej.

Esej Maxwella o stabilności pierścieni

Maxwell zaczyna swoją pracę od streszczenia rozważań Laplace'a (1749–1827) o ruchu pierścieni Saturna. W swoich traktatach *Traité de mécanique céleste*, pisanych w latach 1798–1825, Laplace badał siły przyciągania działające na pierścień. Stąd wyprowadził równanie pozwalające wyznaczyć stosunek szerokości pierścienia do jego grubości. Oznaczmy ten stosunek przez λ. Wspomniane równanie to:

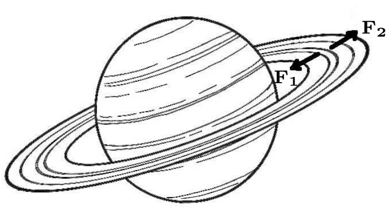
$$e = \frac{R_S^3}{3R_R^3}\frac{\rho_S}{\rho_R} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda^2+1)},$$

gdzie R_S to promień Saturna, z jego gęstością ρ_S, a R_R to promień pierścienia o gęstości ρ_R.

Nietrudno się przekonać, że funkcja $\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda^2+1)}$ (określona dla $\lambda > 0$) jest najpierw rosnąca, a potem malejąca, swoją maksymalną wartość $e_0 = 0{,}0543$ otrzymując dla $\lambda = 2{,}594$ – są to wartości przybliżone podane przez Laplace'a. Stąd jeśli e jest dane, to równanie na λ ma dwa dodatnie pierwiastki, gdy $e < e_0$, oraz nie ma ich w ogóle, gdy e jest większe. Brak rozwiązań dla zbyt dużych wartości e pokazuje, że pierścień nie może się utrzymać, jeśli stosunek gęstości planety do gęstości pierścienia przekracza pewną wartość. Przy dodatkowym założeniu $R_R = 2R_S$ Laplace podał ją w przybliżeniu:

$$\frac{\rho_S}{\rho_R} = e_0 \cdot 3 \cdot (R_R/R_S)^3 \approx \frac{13}{10}.$$

Zastanówmy się, jakie siły działają na pierścień.

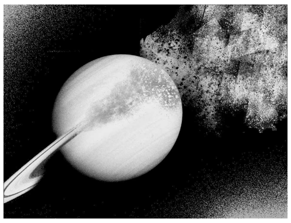


Siły 1 i 2 działające na pierścień

1. Przyciąganie Saturna – zmieniające się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od jego środka.
2. Siła odśrodkowa cząstek pierścienia – działająca na zewnątrz i zmieniająca się wraz z odległością od osi biegunowej Saturna.
3. Przyciąganie samego pierścienia – w zależności od jego formy i gęstości skierowane, w uproszczeniu, w kierunku środka jego przekroju.

Pierwsza z tych sił musi zrównoważyć drugą gdzieś w pobliżu środka pierścienia. Jeśli nie, zewnętrzne i wewnętrzne części pierścienia będą miały tendencję do rozdzielania się, a pierścień ulegnie rozszczepieniu; z przytoczonych wcześniej rachunków Laplace'a wynika, że tak będzie, jeśli gęstość pierścienia będzie mniejsza niż $\frac{10}{13}$ gęstości planety.

We wspomnianych traktatach Laplace wykazał również, że płaszczyzny pierścieni będą podążać za równikiem Saturna przy każdej zmianie jego położenia z powodu zakłócającego działania innych ciał niebieskich. Ponadto pokazuje on, że sztywny, jednorodny pierścień nie może trwale obracać się wokół ciała centralnego, ponieważ najmniejsze przesunięcie środka pierścienia względem środka planety wywołałoby ruch, który nie zostanie powstrzymany i nieuchronnie wytrąci pierścień. We wniosku, na podstawie swoich rozważań, Laplace uznał, że pierścienie są niejednorodnymi bryłami sztywnymi, których środki ciężkości nie pokrywają się z ich środkami geometrycznymi (o różnicy między tymi pojęciami można przeczytać w tekście Wojciecha Kopczyńskiego z Δ^6_{99} przedrukowanym w Δ^{10}_{22}). Maxwell zauważył, że ten wniosek jest nieprawdziwy – poprawne rozumowanie wraz z konkluzją to:

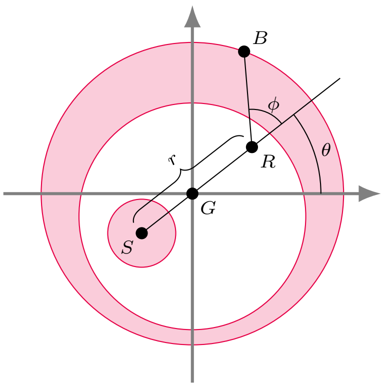


Hipotetyczny rozpad pierścieni

Twierdzenie 1. *Gdyby pierścienie były sztywne i jednorodne, to do tej pory uległyby zniszczeniu. Tak się nie stało. W konsekwencji pierścienie są niejednorodne lub niesztywne.*

Zgodnie z tematem konkursu należało odnieść się do ewentualnej stabilności układu pierścieni. Maxwell zdefiniował ją w następujący sposób:

Definicja 1. Ruch jest *dynamicznie stabilny*, jeśli niewielkie zaburzenie spowoduje okresowe wahanie (o małej amplitudzie) elementów ruchu. Jeśli niewielkie zaburzenie spowoduje zmianę, która narastałaby w nieskończoność i trwale zniekształciła układ, to taki ruch nazwiemy *dynamicznie niestabilnym*.



Ruch pierścienia wokół planety. Rysunek „w ogólności”, dopuszczający niekoncentryczność rozważanych okręgów.
S – środek ciężkości Saturna
R – środek ciężkości pierścienia
G – środek grawitacyjny całego układu
B – ustalony punkt na pierścieniu

W jaki sposób Maxwell odrzucił hipotezę, że pierścień jest bryłą sztywną? Był to wynik błyskotliwej analizy własności mechanicznych oraz dynamicznych układu. Aby modelować ruch pierścieni wokół Saturna, wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech S i R oznaczają odpowiednio środki grawitacyjne Saturna oraz jego pierścienia. Wybierzmy punkt G – środek grawitacyjny systemu (niezmienniczy względem wzajemnych działań układu). Dzieli on odcinek SR w proporcji

$$\frac{SG}{GR} = \frac{m_R}{m_S},$$

gdzie m_S, m_R oznaczają odpowiednio masę Saturna i jego pierścienia. Następnie musimy opisać siły działające między pierścieniem a planetą, a zrobimy to za pomocą *funkcji potencjału*. Oznaczmy ją przez V. Wartość V w każdym punkcie Saturna uzależniamy od położenia danego punktu względem pierścienia. Mamy

$$V = \sum \frac{dm}{r'}, \tag{1}$$

gdzie dm jest elementem masy pierścienia, r' – odległością tego elementu od danego punktu, oraz sumujemy po wszystkich elementach masy należących do pierścienia. Potencjał V będzie zależeć wyłącznie od położenia punktu S względem pierścienia, zatem można go wyrazić w zmiennych r i ϕ (których znaczenie przedstawia rysunek na marginesie), czyli $V = V(r, \phi)$.

Należy skomentować, że wzór (1) jest nieścisły z punktu widzenia współczesnej matematyki. Jest to spore uproszczenie, które jednak wystarczyło Maxwellowi do przeprowadzenia koniecznych obliczeń. Wzór (1) jest natomiast zbliżony do współczesnej definicji potencjału z rozkładem masy zadanym przez miarę m. Wtedy potencjałem jest splot $-\frac{G}{|x|} * dm$, czyli

$$V(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} G\frac{dm(y)}{|x-y|},$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Z definicji potencjału Maxwell wyprowadził równania opisujące ruch pierścienia:

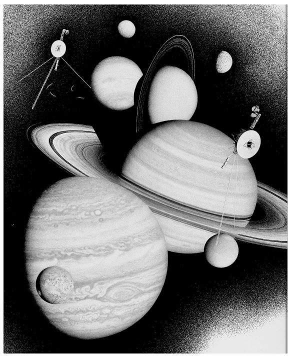
$$m_R\left(2r\cdot\dot{r}\dot{\theta} + r^2\cdot\ddot{\theta}^2\right) + (m_R + m_S)\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \tag{2}$$

$$m_R\left(\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2\right) - (m_R + m_S)\frac{\partial V}{\partial r} = 0, \tag{3}$$

$$m_R k^2\left(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\right) - m_S\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \tag{4}$$

Hipotetyczna, sporej wielkości, punktowa masa na obwodzie, której jednak nie obserwujemy

gdzie k jest promieniem bezwładności pierścienia względem jego środka ciężkości. Za ich pomocą określił, czy ruch pierścienia jest stabilny, czy niestabilny, wyznaczył jego środek ciężkości i potencjał w pobliżu środka pierścienia oraz znalazł warunki na stabilność ruchu w terminach współczynników rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji masy jednostki długości pierścienia. Rozwiążmy za Maxwellem prosty problem.



Artystyczna wizja sond kosmicznych Voyager (1977-) z mijanymi planetami zewnętrznymi. Obraz autorstwa Dona Davisa zamówiony przez Jet Propulsion Laboratory dla upamiętnienia misji.

Zadanie 1. Znaleźć warunki konieczne dla jednostajnego ruchu pierścienia.

Jednostajny ruch oznacza, że r i ϕ są stałe w czasie, a zatem $V = V(r, \phi)$ też. Z równania (3) mamy:

$$m_R r \cdot \dot{\theta}^2 + (m_R + m_S)\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

co pokazuje, że prędkość kątowa $\dot{\theta}$ jest stała w czasie i zachodzi wzór:

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{m_R + m_S}{m_R r}\frac{\partial V}{\partial r} = \text{const.}$$

W konsekwencji mamy $\ddot{\theta} = 0$. Ponadto z (4) otrzymujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

i to są warunki, o które nam chodziło.

Podsumowanie pracy

W dalszej części eseju Maxwell pokazuje, że sztywny pierścień nie może być stabilny poza przypadkiem, gdyby na jego obwodzie znajdowała się sporej wielkości punktowa masa, a nic takiego nie zaobserwowano. Z drugiej strony, płynny pierścień w żadnym wypadku nie jest stabilny i z konieczności musiałby podzielić się na małe porcje. Ostatnim przypadkiem do rozważenia jest układ pierścieni złożony z ogromnej liczby niepołączonych cząstek, krążących wokół planety. Co wiemy o stabilności tego układu? Czy stabilność zależy od ustawienia tych cząstek względem siebie? Maxwell stwierdził, że niezależnie od tego, czy cząstki są ułożone w szeregi wąskich pierścieni, czy mogą poruszać się między sobą niezależnie od siebie, w obu przypadkach wzajemne perturbacje wewnątrz pierścieni będą z czasem narastać do niszczycielskich wielkości, co w przyszłości poskutkuje ich unicestwieniem. Jak zatem rozstrzygnięto, która hipoteza na temat budowy pierścieni Saturna jest słuszna? Niestabilność w dwóch pierwszych przypadkach postępowałaby na tyle szybko, że proces destrukcji układu pierścieni byłby już wtedy obserwowalny, natomiast rozpad pierścieni jako strumienia cząstek postępowałby bardzo wolno. Ostatnie zdanie autor musi poprzeć autorytetem Maxwella, ponieważ zabrakłoby tu miejsca nawet na streszczenie dziesiątek stron modelowania ruchu pierścienia oraz badania własności dynamicznych opartych na obliczeniach wykonanych w tych modelach. Zatem jedyny system pierścieni, jaki może istnieć, to ten złożony z ogromnej liczby cząstek.

Późniejsze obserwacje dokonane przez sondy Voyager w latach 80. XX wieku potwierdziły przewidywania Maxwella, że pierścienie składają się z cząstek, które nie są stabilne. Oczekuje się, że pierścienie znikną całkowicie w ciągu najbliższych 300 milionów lat (obecnie ich wiek szacuje się na od 10 milionów do 100 milionów lat).

Artykuł powstał jako rozszerzenie referatu zaprezentowanego na seminarium „Rewolucja Newtonowska. Matematyka i astronomia XVII wieku", które odbywa się na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

Źródła:

[1] James C. Maxwell, *On the stability of the motion of Saturn's rings*, Cambridge University Press, 1859.
[2] James Clerk Maxwell Foundation, *Saturn's Rings*, poster, 2015. `clerkmaxwellfoundation.org/Saturn-s_Rings.pdf`
[3] J.J. O'Connor, E.F. Robertson, *James Clerk Maxwell*, School of Mathematical and Computational Sciences University of St Andrews (November 1997). `mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maxwell/`
[4] MicroObservatory Robotic Telescope Network, *Saturn – Then & Now*, strona internetowa, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 2009. `mo-www.harvard.edu/microobs/guestobserverportal/Galileo/ThenNow/Saturn/mObsSaturnWeb.htm`
[5] Huygens GCMS: Huygens Gas Chromatograph Mass Spectrometer, *History of Saturn*, strona internetowa, NASA. `attic.gsfc.nasa.gov/huygensgcms/Shistory.htm`
[6] David Sky Brody, *Kingdom of Saturn – Cassini's Epic Quest*, film dokumentalny, 2017.

Rozwiązanie zadania F 1063. Podczas procesu rozpadu cząstki spełnione są zasady zachowania energii i pędu. Oznacza to, że:

$$E_1 + E_2 = mc^2$$

oraz

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0.$$

Z bilansu energii widać, że energie całkowite obu powstających mezonów π są porównywalne z ich masami spoczynkowymi. Musimy więc opisywać proces rozpadu w ramach szczególnej teorii względności.

Niech oś x będzie równoległa do $\vec{p}_1$. Mamy wówczas $p_{1x} = p$ i $p_{2x} = -p$ (pozostałe składowe wektorów pędu są równe zeru). Energie i pędy cząstek związane są zależnościami:

$$E_1^2 - p^2c^2 = m_1^2c^4,$$
$$E_2^2 - p^2c^2 = m_2^2c^4.$$

Skąd otrzymujemy:

$$E_1^2 - E_2^2 = (E_1 + E_2)(E_1 - E_2) = = (m_1^2 - m_2^2)c^4.$$

Po kilku prostych przekształceniach, pamiętając, że $E_1 + E_2 = mc^2$, otrzymujemy ostatecznie:

$$E_1 = \frac{(m^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m},$$
$$E_2 = \frac{(m^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2}{2m}.$$

Liczbowo:
$E_1 = 284{,}4$ MeV i $E_2 = 245{,}6$ MeV.