Różności w kolorowej rzeczywistości

Bartłomiej BZDĘGA

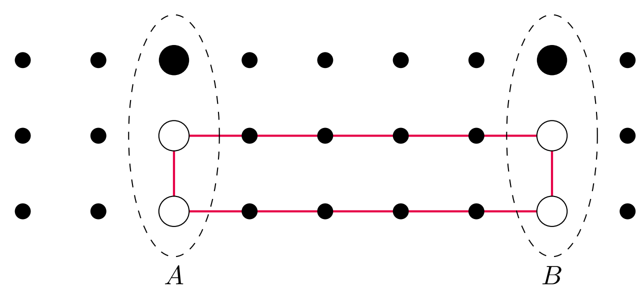
Ze względu na zbliżające się Święta Bożego Narodzenia kącik jest kolorowy, niczym lampki choinkowe. Na stole znajdujemy kolorowe zadania – o dowodzeniu istnienia jednokolorowych obiektów w wielokolorowych rzeczywistościach.

Załóżmy, że mamy dany zbiór A, którego każdy element pokolorowano jednym z k kolorów. Chcemy wykazać, że istnieje jakiś podzbiór C zbioru A, który ma wszystkie elementy tego samego koloru, a jednocześnie spełnia zadany dodatkowy warunek. Idea dowodu zwykle jest następująca. Wybieramy pewien zbiór $B \subset A$ i przeprowadzamy dowód istnienia jednokolorowego $C \subset B$. Brzmi to dziwnie, ale czasem *zmniejszenie* zbioru powoduje *uproszczenie* rozwiązania.

Pokażę przykład wyżej opisanego postępowania. Należy on do matematycznego folkloru.

Zadanie. Jeśli każdy punkt płaszczyzny pomalowano na czarno lub na biało, to pewne cztery punkty tego samego koloru są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie. Rozważmy prostokąt złożony z 9×3 punktów płaszczyzny.



Każdy *słupek* (trzy punkty w jednym pionie) ma co najmniej dwa punkty w tym samym kolorze. Ponadto pewne dwa słupki są identyczne (niech to będą A i B), gdyż trzy punkty można pokolorować na $2^3 = 8$ sposobów. Słupek A ma dwa punkty tego samego koloru na tym samym poziomie, co słupek B – to daje poszukiwany prostokąt.

Problemy podobnego typu matematycy nazywają *ramseyowskimi* – są bowiem podobne w sformułowaniu do słynnego twierdzenia Ramseya, które zapewne jeszcze się kiedyś pojawi w tym kąciku. (O twierdzeniu Ramseya pisaliśmy już w Δ^3_{08} oraz Δ^4_{17}).

Zadania

1. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na żółto lub na niebiesko. Udowodnić, że:
   (a) pewne dwa punkty tego samego koloru są końcami odcinka o długości 1;
   (b) pewne trzy punkty tego samego koloru są wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego (*IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów, etap I, zadanie 6*);
   (c) pewne trzy punkty tego samego koloru są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
2. Rozwiązać podpunkt (a) z poprzedniego zadania dla trzech kolorów.
3. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z n kolorów. Udowodnić, że pewne cztery punkty tego samego koloru są wierzchołkami prostokąta.
4. Każdy punkt przestrzeni pokolorowano jednym z n kolorów. Udowodnić, że pewien prostopadłościan ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.
5. Każdy punkt okręgu pokolorowano na czerwono lub zielono. Udowodnić, że pewne trzy punkty tego samego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.
6. Rozwiązać zadanie analogiczne do poprzedniego dla trzech kolorów (*LI Olimpiada Matematyczna, etap I, zadanie 4*).
7. Każdy punkt sfery pomalowano na czarno lub biało. Dowieść, że pewne trzy punkty jednakowego koloru są wierzchołkami trójkąta równobocznego (*IX Mała Olimpiada Matematyczna, etap II, grupa starsza, zadanie 3*).

Wskazówki do zadań

1. (a) Rozważyć wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1.
(b, c) Zacząć od dwóch punktów jednakowego koloru, które wymuszają inny kolor kolejnych punktów. Kontynuując takie „wymuszanie", dojdzie się do tezy.

2. Rozważyć takie punkty A, B, C, D, E, F, G, że trójkąty ABC, BCD, EFG i FGA są równoboczne o boku 1 oraz $|DE| = 1$.

Ciekawostka. Problem znalezienia najmniejszej liczby kolorów, którymi można tak pokolorować płaszczyznę, by nie było odcinka długości 1 o końcach tego samego koloru, nosi nazwę *problemu Hadwigera–Nelsona*. Dziś wiadomo, że liczba ta, zwana *liczbą chromatyczną płaszczyzny*, należy do zbioru $\{5, 6, 7\}$.

3. Postąpić tak jak w przykładowym zadaniu. Słupki muszą liczyć tyle punktów, by każdy z nich miał zagwarantowane dwa punkty tego samego koloru. Liczba słupków musi być na tyle duża, aby istnienie dwóch identycznych było zapewnione.

4. Zbudować dyskretny prostopadłościan, kopiując układ punktów z poprzedniego zadania odpowiednią liczbę razy, na równoległych płaszczyznach.

5. Każde trzy wierzchołki pięciokąta foremnego wyznaczają trójkąt równoramienny.

6. Wśród każdych pięciu wierzchołków trzynastokąta foremnego znajdują się trzy będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Ciekawostka. Teza zadania (a nawet coś znacznie mocniejszego) wynika z następującego *twierdzenia van der Waerdena*:
Dla każdej pary (k, d) liczb całkowitych dodatnich istnieje taka liczba n, że dla każdego kolorowania liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ za pomocą k kolorów znajdziemy jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości d.

7. Rozważyć dwudziestościan foremny wpisany w daną sferę. Uwaga – nie tylko ściany dwudziestościanu foremnego są trójkątami równobocznymi wyznaczonymi przez jego wierzchołki.