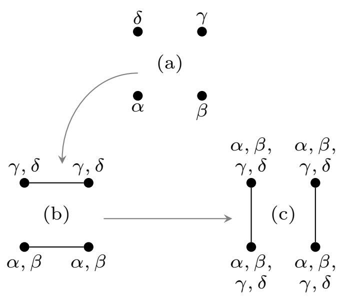
Plotki, ploteczki, plotunie

*Łukasz RAJKOWSKI**

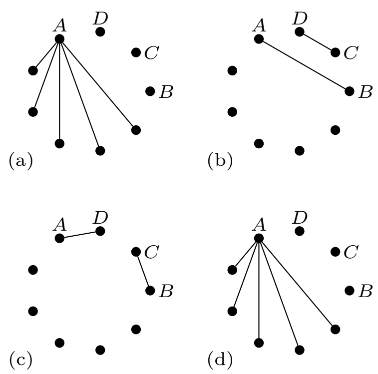
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W pewnym mieście mieszka n plotkarzy. Niestety po wprowadzeniu całkowitego lockdownu mogą oni komunikować się wyłącznie telefonicznie. Kiedy dwoje plotkarzy rozmawia ze sobą, wymieniają się wszystkimi posiadanymi informacjami. Tuż przed wprowadzeniem lockdownu każdy z nich dysponował pewną cenną plotką, nieznaną pozostałym. Ilu połączeń telefonicznych potrzeba do pełnej wymiany plotek między plotkarzami?



Rys. 1

Przyjrzyjmy się przypadkowi $n = 4$. Naszymi plotkarzami będą Antek, Basia, Celina i Damian; przez $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ oznaczmy informacje posiadane przez nich na początku (rys. 1a). Jeśli A zadzwoni do B, to po tej rozmowie oboje będą świadomi α i β. W tym czasie C może zadzwonić do D, dzięki czemu każde z nich będzie wiedziało o γ i δ (rys. 1b). Wystarczy teraz, aby B zdzwoniła się z C, a D z A, i każde z nich wie już o α, β, γ i δ (rys. 1c). Oznacza to, że cztery połączenia wystarczą. Czytelnikowi pozostawiamy uzasadnienie, że trzy połączenia to za mało, aby nasycić głód plotek czterech plotkarzy.

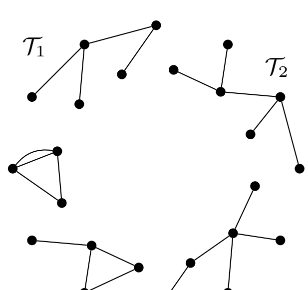


Rys. 2

Pokażemy teraz, że $n \geqslant 4$ plotkarzom wystarczy $2n - 4$ połączeń. Można się o tym przekonać, stosując rozumowanie indukcyjne, a można też postąpić odrobinę bardziej konstruktywnie. Wśród $n \geqslant 4$ rozmówców wyróżnijmy czterech, podobnie jak poprzednio oznaczmy ich przez A, B, C i D. Spośród nich największą gadułą jest A i to on na początku zbiera informacje od wszystkich poza B, C i D, wykonuje zatem $n - 4$ połączeń (rys. 2a). Następnie wykonywany jest ciąg 4 połączeń: A—B, C—D (rys. 2b), B—C i D—A (rys. 2c), po którym wyróżniona czwórka plotkarzy wie wszystko o wszystkich. Wystarczy teraz, by jeden z nich (powiedzmy, że znowu A) podzielił się swą wszechwiedzą, dzwoniąc do pozostałych $n - 4$ plotkarzy (rys. 2d). W ten sposób dokonała się pełna wymiana informacji za pomocą $(n - 4) + 4 + (n - 4)$, czyli $2n - 4$, połączeń.

Okazuje się, że powyższy, dość banalny, schemat połączeń jest optymalny – nie jest możliwa pełna wymiana informacji za pomocą mniejszej liczby rozmów telefonicznych. Uzasadnieniu tego faktu poświęcona jest dalsza część artykułu. Niech $\mathtt{X}$ będzie szukaną, optymalną liczbą połączeń; chcemy wykazać nierówność $\mathtt{X} \geqslant 2n - 4$. Rozważmy dowolny ciąg $\mathtt{X}$ połączeń prowadzących do pełnej wymiany informacji (takie ciągi będziemy nazywać *optymalnymi*). Jeśli na rysunku zaznaczymy wszystkie wykonane połączenia, to dowolnych dwóch plotkarzy będziemy mogli połączyć drogą utworzoną z narysowanych kresek (gdyż inaczej nie poznaliby wzajemnie swoich tajemnic). Profesjonalnie rzecz ujmując, uzyskany w ten sposób graf jest *spójny*. Grafy spójne mają zaś to do siebie, że liczba występujących w nich krawędzi nie może być mniejsza od liczby wierzchołków pomniejszonej o 1, skąd wnioskujemy nierówność $\mathtt{X} \geqslant n - 1$.

Zaznaczmy teraz na rysunku pierwsze $n - 2$ połączenia. Tak uzyskany graf jeszcze nie jest spójny, ma co najmniej dwie *spójne składowe*, czyli spójne zbiory wierzchołków. Można powiedzieć nawet więcej – istnieją co najmniej dwie spójne składowe będące *drzewami* (co oznacza, że nie mają cykli). Spośród tych drzewiastych składowych wybierzmy dwie o najmniejszej liczbie wierzchołków i oznaczmy je $\mathcal{T}_1$ oraz $\mathcal{T}_2$ (przy czym $\mathcal{T}_1$ jest nie mniejsze od $\mathcal{T}_2$, tzn. $|\mathcal{T}_1| \leqslant |\mathcal{T}_2|$, por. rys. 3). W ten sposób każdemu optymalnemu ciągowi połączeń możemy przypisać dwie liczby: $|\mathcal{T}_1|$ oraz $|\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$. Wybierzmy teraz taki optymalny ciąg, który



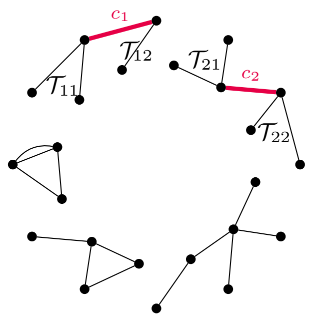
Rys. 3. Graf połączeń po 22 rozmowach między 24 plotkarzami (niektóre rozmowy mogły odbyć się więcej niż raz).

(•) minimalizuje $|\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$,

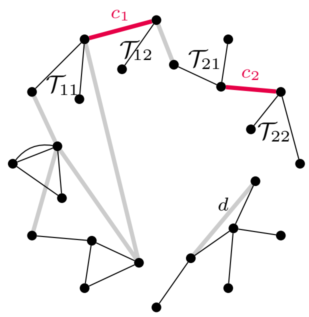
a jeśli takich ciągów jest więcej niż 1, to spośród nich wybierzmy dowolny, który

(••) minimalizuje $|\mathcal{T}_1|$.

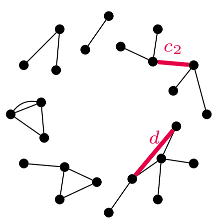
Udowodnimy najpierw, że przy takim wyborze optymalnego ciągu zachodzi $|\mathcal{T}_1| > 1$. Przypuśćmy przeciwnie. Składowa $\mathcal{T}_1$ składa się z jednego plotkarza, nazwijmy go Antkiem. Po $n - 2$ połączeniach nie zdradził on jeszcze nikomu swojego sekretu. Rozważany ciąg jest jednak optymalny, więc tajemnica A musi w kolejnych rozmowach zostać rozpowszechniona wśród wszystkich plotkarzy.



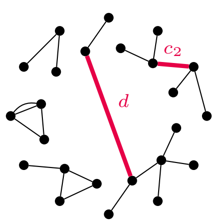
Rys. 4



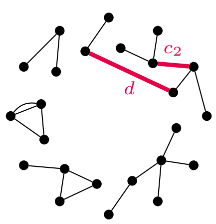
Rys. 5. Pierwszych 28 połączeń. Półprzezroczyste połączenia nastąpiły po 22. połączeniu. Połączenie d jest 28. i jako pierwsze nie „rozrasta się” z c_1



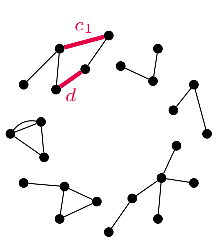
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

W szczególności, graf złożony z tych kolejnych połączeń musi być spójny, jest ich zatem co najmniej $n-1$. Wraz z początkowymi połączeniami daje to w sumie $2n-3$ rozmów. Na początku artykułu wykazaliśmy jednak nierówność $\mathtt{X} \leqslant 2n-4$ (wskazując ciąg $2n-4$ rozmów skutkujących wymianą informacji), zatem przypuszczenie $|\mathcal{T}_1| = 1$ doprowadziło nas do sprzeczności.

Dalsza część rozumowania oparta jest na następującej, dość oczywistej, obserwacji, którą nazwiemy Zasadą Wymiany (w skrócie ZW, nie mylić z „Zaraz Wracam”):

Jeśli w optymalnym ciągu rozmów występują ***bezpośrednio po sobie*** *dwa połączenia, angażujące czterech różnych rozmówców, to te dwa połączenia możemy zamienić kolejnością, a otrzymany w ten sposób ciąg wciąż będzie optymalny.*

Aby ugruntować oczywistość ZW, dodajmy jeszcze, że oba opisane w niej połączenia równie dobrze mogłyby odbyć się równocześnie – ich kolejność nie może mieć zatem znaczenia dla rozpowszechniania się plotek.

Wiemy już, że w opisanym przez wymogi (•) i (••) optymalnym ciągu zachodzi $|\mathcal{T}_1| > 1$. Niech c_i będzie ostatnim połączeniem (wśród pierwszych $n-2$) wykonanym przez plotkarzy przynależnych do $\mathcal{T}_i$ $(i = 1, 2)$. Po zabraniu c_i drzewo $\mathcal{T}_i$ rozpada się na dwa poddrzewa; oznaczmy je $\mathcal{T}_{i1}$ oraz $\mathcal{T}_{i2}$ (rys. 4). Zgodnie z ZW możemy przesunąć połączenia c_1 i c_2 „na koniec kolejki” bez straty optymalności. Załóżmy zatem, że c_1 i c_2 były połączeniami o numerach odpowiednio $n-2$ oraz $n-3$. Pokażemy teraz, że wszystkie następne połączenia „rozrastają się” z c_1, tzn. w każdej kolejnej rozmowie co najmniej jeden z rozmówców może zostać połączony ciągiem wcześniejszych rozmów z którymś z uczestników c_1.

Przypuśćmy, że jest inaczej. Niech d będzie pierwszą rozmową, która o tym świadczy (tzn. wcześniejsze, aż do c_1, „rozrastały się” z c_1 i c_2, patrz rys. 5). Na mocy ZW możemy (bez straty optymalności) zamienić rozmowę d z poprzedzającą… i jeszcze poprzedzającą… i jeszcze… i tak aż dojdziemy do rozmów c_1 i c_2. Dokonajmy jeszcze zamiany z c_1, tak by mieć w ręku optymalny ciąg rozmów, w którym c_2 i d są rozmowami o numerach odpowiednio $n-3$ i $n-2$ (rys. 6). Przyjrzyjmy się plotkarzom, którzy uczestniczyli w rozmowie d. Co najmniej jeden z nich musi być częścią $\mathcal{T}_1$, inaczej nasz nowy optymalny ciąg rozmów przeczyłby wymogowi (•), gdyż $|\mathcal{T}_{11} \cup \mathcal{T}_{12}| < |\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$. Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że jeden z rozmówców należy do $\mathcal{T}_{12}$. A co z drugim?

→ Gdyby **nie** należał do $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ (rys. 7), to znów otrzymujemy sprzeczność z (•), gdyż $|\mathcal{T}_{11} \cup \mathcal{T}_2| < |\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$. W ten sam sposób odrzucamy możliwość przynależenia drugiego rozmówcy do $\mathcal{T}_{12}$.
→ Gdyby należał do $\mathcal{T}_2$ (rys. 8), to warunek (•) nie jest co prawda naruszony, gdyż drzewa $\mathcal{T}_{11}$ oraz $\mathcal{T}_{12}$—$\mathcal{T}_2$ (tzn. „zrośnięcie” drzew $\mathcal{T}_{12}$ i $\mathcal{T}_2$) mają sumarycznie tyle samo wierzchołków co $\mathcal{T}_1$ oraz $\mathcal{T}_2$. Nasz wyjściowy optymalny ciąg połączeń miał jednak w drugiej kolejności realizować (••), co jest w tym przypadku naruszone, gdyż $|\mathcal{T}_{11}| < |\mathcal{T}_1|$.

Ostatecznie drugi rozmówca musi być częścią $\mathcal{T}_{11}$. Ale wtedy możemy znów skorzystać z ZW i przesunąć połączenie c_2 na tuż po c_1 (tak, aby połączenia d i c_1 były wykonane jako $(n-3)$-cie i $(n-2)$-gie, rys. 9). Uzyskany optymalny ciąg połączeń przeczy jednak (•), gdyż $|\mathcal{T}_{21} \cup \mathcal{T}_{22}| < |\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2|$ (rys. 8).

Uf, pracowicie uzasadniliśmy, że począwszy od połączenia o numerze $(n-1)$ wszystkie „rozrastają się” od c_1 i c_2. Niech α i β będą prywatnymi sekretami plotkarzy, którzy wzięli udział w rozmowie c_1. Zastanówmy się nad liczbą plotkarzy, którzy jednocześnie wiedzą o α i β. Przed rozmową c_1 nie ma takich osób. Bezpośrednio po rozmowie c_1 mamy dokładnie dwóch takich plotkarzy, czyli uczestników c_1. Z naszego odkrycia dotyczącego „rozrastania z c_1 i c_2” wynika, że z każdą kolejną rozmową liczba interesujących nas plotkarzy wzrasta o co najwyżej 1. Plotkarze nie spoczną, dopóki wszyscy nie dowiedzą się wszystkiego, w szczególności po zakończeniu wszystkich rozmów nasza liczba jest równa n. Wynika stąd, że po rozmowie c_1 musiały mieć miejsce co najmniej $n-2$

rozmowy, wszystkich rozmów musiało być zatem co najmniej $2n-4$. Ponieważ mieliśmy do czynienia z ciągiem optymalnym, nierówność $\mathtt{X} \geqslant 2n-4$ została udowodniona.

Przedstawiony problem zaczął krążyć wśród matematyków na początku lat 70. XX wieku i bardzo szybko doczekał się rozwiązania (np. [1]). Powyższy dowód zaczerpnięty został z pracy [2], w której w pełni przeanalizowano sytuację bliższą współczesnym udogodnieniom technologicznym, mianowicie plotkarze mogą wymieniać się informacjami podczas konferencji, w których może uczestniczyć co najwyżej K osób. Możliwych uogólnień i związanych z tematem pytań jest zresztą bardzo wiele i do dziś pojawiają się publikacje (np. [3]), których źródła można doszukać się w naszej wdzięcznej zagadce. Plotka głosi, że nie jest to ostatni raz, kiedy pojawia się ona w *Delcie*.

Literatura:

[1] Robert Tijdeman, *On a telephone problem*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XIX, (1971), 188–192.
[2] Daniel Kleitman, James Shearer, *Further gossip problems,* Discrete Mathematics 30.2 (1980): 151-156.
[3] Krzysztof Apt, Eryk Kopczyński, Dominik Wojtczak, *On the Computational Complexity of Gossip Protocols,* IJCAI (2017), 765–771.

O sztuce zadawania pytań

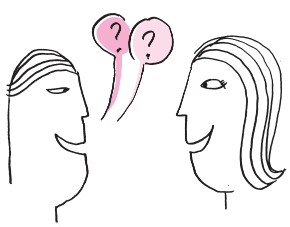
*Damian NIWIŃSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

– *No to do jutra! Czy spotkamy się znów o dziesiątej rano?*
– *Niestety, Jasiu, rano nie mogę, mam próbę orkiestry...*
– *Aa... Nie wiedziałem, Małgosiu, że grasz w orkiestrze! Na jakim instrumencie?*
– *Zgadnij!* – *Małgosia uśmiechnęła się.* – *Myślę, że wystarczą ci trzy pytania. Jesteś przecież matematykiem.*

– *No cóż... współczesna orkiestra liczy kilkadziesiąt różnych instrumentów. Ale, choć znamy się już od tygodnia, jeszcze nie widziałem cię z futerałem. Chyba więc twój instrument nie jest łatwo przenośny. Może kontrabas, może fortepian, może perkusja...* – *Jaś zamyślił się.*

– *Czy Twój instrument ma struny?*
– *Nie!*
– *A klawiaturę?*
– *Tak!*
– *A zatem są to organy... muszę koniecznie cię usłyszeć!*
– *Zapraszam na koncert, za tydzień gramy Symfonię Organową Saint–Saënsa!*



* * *

Jaś poradził sobie w dwóch pytaniach, choć zapewne miał trochę szczęścia. Zadawanie pytań tak, by wyciągnąć maksimum wiedzy, będzie tematem naszych rozważań. Będziemy zwykle dopuszczać tylko dwie odpowiedzi: tak lub nie. Większość pytań da się sprowadzić do tej postaci, czasem przez zastąpienie jednego pytania serią, jak to było z pytaniem o instrument w powyższej rozmowie. Spójrzmy na rzecz abstrakcyjnie. Chcemy obmyślić taką strategię zadawania pytań, by jak najszybciej dojść do celu. Gdy poszukiwany obiekt pochodzi ze zbioru o n elementach, o których niewiele wiemy, to rozsądną strategią jest podzielenie naszego zbioru na dwie części o tej samej liczności (być może z dokładnością do jednego elementu) i zapytanie, czy nasz obiekt znajduje się w pierwszej części (jeśli nie – jest w drugiej). Dalej postępujemy w ten sam sposób, aż nasz zbiór stanie się jednoelementowy. Proces ten można przedstawić jako drzewo, gdzie węzłami są pytania, a przejścia w lewo lub w prawo zależą od otrzymanych odpowiedzi. Na przykład, gdy poszukiwany obiekt jest jedną z 8 liter a, b, c, d, e, f, g, h, nasza strategia może wyglądać tak:

$a \ldots d \mid e \ldots h$

$a, b \mid c, d$ $\qquad$ $e, f \mid g, h$

$a \mid b$ $\quad$ $c \mid d$ $\quad$ $e \mid f$ $\quad$ $g \mid h$

a **b** **c** **d** **e** **f** **g** **h**

Kiedy otrzymamy odpowiedzi: tak, nie, tak, wiemy, że poszukiwanym obiektem jest c. W każdym przypadku zadamy 3 pytania, czyli binarny logarytm z $n=8$.

Ogólnie, gdy $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, wtedy postępując w podobny sposób zadamy k lub $k+1 = \lceil \log_2 n \rceil$ pytań, co można łatwo sprawdzić przez indukcję po n.

Rozwiązanie zadania M 1729.
Nie. Rozważmy prostokąt o bokach 2 i $\sqrt{3}$ podzielony w następujący sposób: