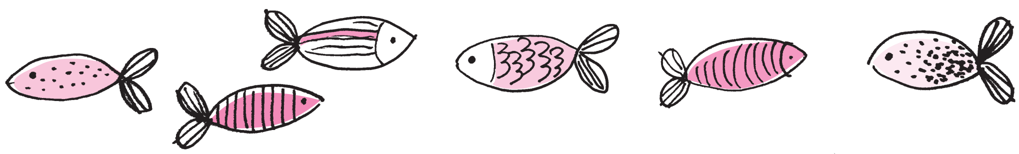
Źródła

[1] International Energy Agency 2018 World Energy Outlook report
[2] Merckgroup.com
[3] Heliatek.com
[4] Asca.com
[5] OxfordPV.com/news 14 Nov. 2016
[6] OxfordPV.com/news 3rd July 2019
[7] Sauletech.com

ogniwa drugiej generacji (cienki film) oparte na CIGS (sprawność 23,4%) i CdTe (sprawność 22,1%), a nawet pierwszej generacji ogniwo krzemowe (sprawność 22,8%).

Dokładniejsza analiza działania ogniwa perowskitowego (wykraczająca poza ramy tego artykułu) wymaga rozróżnienia pewnych obszarów w warstwie perowskitu: rdzenia i interfejsu. Ten ostatni to obszar styku z sąsiednią warstwą, w którym, jak się okazuje, zachodzą kluczowe dla działania ogniwa procesy, mające istotny wpływ na sprawność. Ich dokładniejsze zrozumienie może jeszcze tę sprawność poprawić. Jest to więc ciągle przedmiot badań, podobnie jak eksperymentowanie z innymi materiałami, takimi jak węgiel i azot, zamiast ołowiu i jodku (które są toksyczne). Syntetyzowanie perowskitów o różnych składach, badanie ich własności i postęp w zrozumieniu budowy tego materiału w nanoskali mogą przyczynić się do opracowania jeszcze wydajniejszych, trwalszych i tańszych ogniw, które będzie można efektywnie wykorzystywać na coraz większą skalę.



Tyrania większości: Jak budżet partycypacyjny w Polsce dyskryminuje mniejszości

Grzegorz PIERCZYŃSKI, Piotr SKOWRON**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Budżet partycypacyjny to proces, w którym mieszkańcy gminy decydują o tym, jak rozdysponować część środków z jej budżetu. W pierwszej fazie zgłaszane są propozycje projektów – aby zgłosić projekt, należy m.in. przygotować jego opis oraz podać koszt realizacji. Kolejnym krokiem jest głosowanie, na podstawie którego podejmowana jest decyzja, które z projektów zostaną zrealizowane. Pytanie brzmi: w jaki sposób sprawiedliwie rozdysponować środki z budżetu?

karta wyborcza	
a (koszt 120)	◯
b (koszt 200)	✓
c (koszt 500)	◯
d (koszt 600)	◯
e (koszt 500)	✓
f (koszt 180)	◯
g (koszt 1000)	✓
h (koszt 110)	◯

Karta do głosowania przez aprobaty. Wyborca, nazwijmy go i, zagłosował na projekty b, e oraz g. Zakładając, że jego zadowolenie to liczba pieniędzy przeznaczona na projekty, na które zagłosował, mamy $u_i(b) = 200$, $u_i(e) = 500$, $u_i(g) = 1000$ oraz $u_i(p) = 0$ dla $p \notin \{b, e, g\}$

Przykładowo, w Warszawie w 2021 roku pośród wybranych pomysłów znalazły się trzy kosztowne projekty dotyczące budowy infrastruktury dla rowerów. Projekty te sumarycznie kosztowały aż 11,5 mln złotych, co stanowiło około 46% dostępnych środków. Na projekty te zagłosowało 39% wyborców. Oznacza to, że wyborcy ci zdecydowali o proporcjonalnie większej kwocie, niż wynikałoby to z ich liczby. Z drugiej strony, projekt modernizacji bieżni przy Szkole Podstawowej nr 222 nie otrzymał finansowania. Projekt ten kosztowałby tylko 3,2% przeznaczonych dla dzielnicy środków, a zagłosowało na niego aż 4,5% wyborców z tej dzielnicy. Co więcej, żaden z projektów, na który zagłosowali ci wyborcy, nie został wybrany – ich głosy zostały zignorowane. Patrząc ogólniej, gdyby zrezygnować z połowy projektów rowerowych, na które oddano 32 tysiące głosów, można by zrealizować inne, które otrzymały w sumie ponad 200 tysięcy głosów!

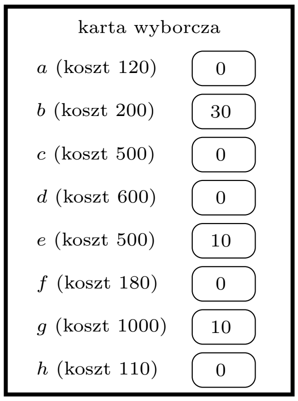
Przykład ten pokazuje, że metoda głosowania stosowana w Warszawie dyskryminuje pewne grupy wyborców. Przyjrzyjmy się jej bliżej.

Reguła 1 (reguła zachłanna). *Wyborcy głosują przez aprobaty: każdy wyborca może zagłosować na kilka projektów. Następnie wybieramy projekty w kolejności liczby otrzymanych głosów, dopóki pozwalają na to dostępne środki.*

Załóżmy, że mamy 20 projektów: 10 niebieskich i 10 czerwonych. Możemy zrealizować tylko 10 z nich. Załóżmy, że 51% wyborców głosuje na wszystkie niebieskie, a 49% na czerwone. Reguła zachłanna wybrałaby 10 projektów niebieskich. To zjawisko jest nazywane **tyranią większości**. Bardziej sprawiedliwe byłoby zrealizowanie 6 projektów niebieskich i 4 czerwonych, lub nawet 5 niebieskich i 5 czerwonych.

Co gorsza, tyrania większości jest tak naprawdę **tyranią największej mniejszości**. Okazuje się, że nawet mała grupa wyborców może zdecydować o całym budżecie gminy; dzieje się tak, gdy głosy oddane przez pozostałych wyborców są rozproszone na różne projekty. Przykładowo, gdyby w Krakowie w 2020 roku 3586 wyborców (8,5% wszystkich wyborców) umówiło się, że chcą zagłosować na ten sam kosztowny projekt, to mogliby wykorzystać cały budżet przeznaczony na projekty ogólnomiejskie (6,4 mln zł). Byłoby to bardzo niesprawiedliwe.

Czy możemy zatem zaprojektować metodę głosowania, która byłaby sprawiedliwa? Otóż tak! Aby ją opisać, zacznijmy od wprowadzenia pomocnej notacji matematycznej. Niech $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ i $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczają odpowiednio zbiór projektów, które zostały zgłoszone, oraz zbiór wyborców. Niech $\mathrm{koszt}(p)$ oznacza koszt projektu $p \in P$; przez k natomiast oznaczmy wielkość dostępnego budżetu.



Przykładowa karta do głosowania w skali. Mamy 8 projektów, $a, b, \ldots, h$, których koszty są zaznaczone w nawiasach. Wartość zadowolenia wyborcy z realizacji projektów jest podana explicite w postaci wartości punktowych. Wyborca i przypisał 30 punktów do projektu b i po dziesięć punktów do projektów e i g. Zatem $u_i(b) = 30$, $u_i(e) = u_i(g) = 10$ oraz $u_i(p) = 0$ dla $p \notin \{b, e, g\}$

Istnieje wiele formatów głosowania. Jednym z prostszych jest głosowanie przez aprobaty: każdy wyborca wskazuje projekty, które popiera. Alternatywą, która pozwala wyborcom lepiej wyrazić swoje preferencje, jest głosowanie w skali, czyli przypisanie każdemu projektowi pewnej liczby punktów (np. od 0 do 100). Na podstawie głosu wyborcy i definiujemy jego *zadowolenie* z projektu p, oznaczane $u_i(p)$. W przypadku głosowania w skali zadowolenie definiujemy jako liczbę punktów podaną przez wyborcę, a dla głosowania przez aprobaty odpowiada ono kwocie wydanej na popierane przez niego projekty, czyli $u_i(p) = \mathrm{koszt}(p)$, jeżeli i głosuje na p, i $u_i(p) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Spróbujmy teraz matematycznie zdefiniować, czym jest sprawiedliwość, czyli co to znaczy, że metoda wyborcza nie dyskryminuje wyborców. Powiemy, że grupa wyborców $S \subseteq N$ *zasługuje na zadowolenie* β, jeżeli wyborcy z S mając do dyspozycji proporcjonalną część budżetu (czyli $|S| \cdot k/n$), byliby w stanie zakupić taki zbiór projektów T, który dawałby im w sumie zadowolenie większe bądź równe β. Zadowolenie grupy S z jednego projektu definiujemy jako zadowolenie najmniej zadowolonego wyborcy ($\sum_{p \in T} \min_{i \in S} u_i(p) \geqslant \beta$).

Definicja 1. *Zbiór projektów $W \subseteq P$ dyskryminuje grupę wyborców S, jeżeli grupa S zasługuje na zadowolenie β, ale zadowolenie ze zbioru W każdego wyborcy z S jest mniejsze niż β. Zbiór W jest* proporcjonalny*, jeżeli nie dyskryminuje żadnej grupy wyborców.*

Wspomniana na początku artykułu grupa 4,5% wyborców zasługiwała na zadowolenie, jakie otrzymałaby z modernizacji bieżni. Nie otrzymała jednak nic – zgodnie z naszą definicją grupa ta została zdyskryminowana.

Zasada proporcjonalności jest naturalnym kryterium. Co więcej, zbiór projektów, który ją spełnia, zawsze istnieje! Niestety jego znalezienie jest wyzwaniem nawet dla współczesnych komputerów. Pokażemy jednak, że istnieje reguła, która spełnia odrobinę słabszy warunek i którą można efektywnie obliczać[†].

[†]D. Peters, G. Pierczyński, and P. Skowron. Proportional participatory budgeting with additive utilities. In *Proceedings of the 35th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS-2021)*, pages 12726–12737, 2021.

Definicja 2. *Wybrany zbiór projektów $W \subseteq P$ jest* proporcjonalny z dokładnością do jednego projektu*, jeżeli dla każdej grupy wyborców $S \subseteq N$ istnieje jeden projekt, po którego sfinansowaniu grupa S nie będzie dyskryminowana.*

Zdefiniujmy metodę, która spełnia tę zasadę. Początkowo pieniądze z budżetu dzielimy po równo między wyborców. Potem, w kolejnych krokach, szukamy projektów, na które jakaś grupa wyborców może się zrzucić, i spośród nich wybieramy ten, który daje największe zadowolenie za każdą wydaną złotówkę.

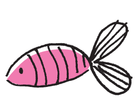
Aby opisać metodę formalnie, wprowadźmy dodatkowe oznaczenia. Niech k_i oznacza ilość pieniędzy, którymi dysponuje wyborca i w danej chwili. Powiemy, że projekt $p \in P$ jest λ–opłacalny, jeżeli wyborcy mogą go kupić tak, aby każdy z nich wydał λ złotych za jednostkę zadowolenia (lub całą posiadaną kwotę, jeżeli nie ma wystarczających środków):

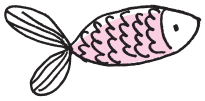
$$\sum_{i \in N} \min(k_i, \lambda \cdot u_i(p)) = \mathrm{koszt}(p).$$

Zwróćmy uwagę, że projekt 2–opłacalny jest bardziej opłacalny niż 3–opłacalny, bo w jego przypadku wszyscy płacą mniej (nie więcej niż 2 złote) za jednostkę zadowolenia.

Reguła 2 (metoda równych udziałów)**.** *Początkowo każdy wyborca $i \in N$ dostaje $k_i := k/n$ złotych. Zaczynamy od pustego zbioru projektów $W = \emptyset$ i wykonujemy w pętli:*

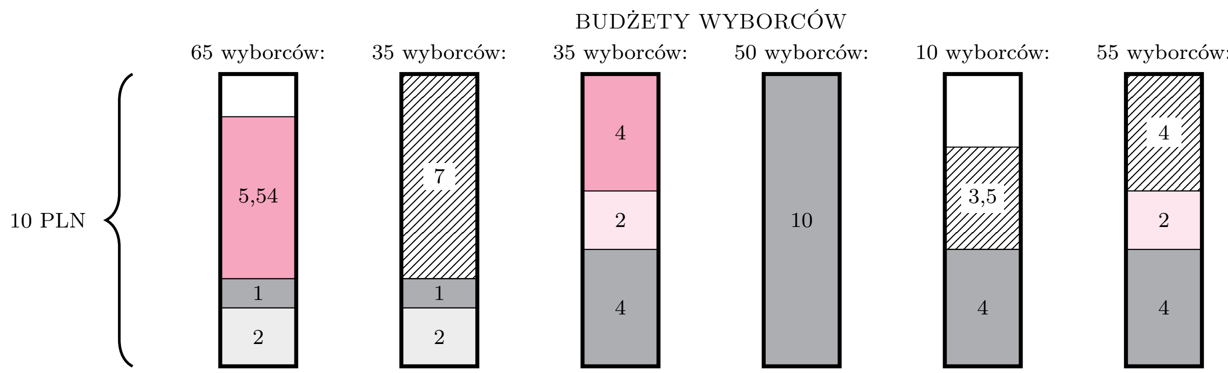
> *Wybieramy projekt $p \notin W$, który jest λ–opłacalny dla najniższej wartości λ, i dodajemy go do zbioru: $W := W \cup \{p\}$. Następnie aktualizujemy budżety wyborców: dla każdego $i \in N$ ustalamy $k_i := k_i - \min(k_i, \lambda \cdot u_i(p))$.*
>
> *Kończymy, kiedy wyborcy nie mają pieniędzy, aby kupić dodatkowy projekt, na który zagłosowali (czyli jeżeli dla każdego $p \notin W$ mamy $\sum_{i \in N\colon u_i(p) > 0} k_i < \mathrm{koszt}(p)$).*





Zilustrujmy działanie metody na przykładzie. Przypuśćmy, że mamy 250 wyborców, a dostępny budżet wynosi $k = 2500$. Mamy 8 projektów, $a, \dots, h$. Wartości przypisane przez wyborców do projektów są przedstawione na poniższym diagramie. Przykładowo, pierwszych 65 wyborców przypisuje 30 punktów dla projektu b, 10 punktów dla projektów e oraz g oraz 0 punktów dla pozostałych projektów.

	głos (65 głosów)	głos (35 głosów)	głos (35 głosów)	głos (50 głosów)	głos (10 głosów)	głos (55 głosów)
a (koszt 120)	0	0	0	1	2	0
b (koszt 200)	30	30	0	0	0	0
c (koszt 500)	0	30	0	0	5	10
d (koszt 600)	0	0	0	100	0	0
e (koszt 500)	10	0	30	0	0	0
f (koszt 180)	0	0	10	10	0	10
g (koszt 1000)	10	10	40	100	40	40
h (koszt 110)	0	0	0	2	1	1



Początkowo budżet dzielimy po równo między wyborców, więc każdy dostaje 10 złotych. Reguła w pierwszym kroku wybiera projekt b, który jest 1/15–opłacalny: aby go sfinansować, wszyscy wyborcy z pierwszych dwóch grup płacą po 2 zł (płatności są również zilustrowane na diagramie) i otrzymują 30 jednostek zadowolenia. Łatwo sprawdzić, że inne projekty są mniej opłacalne. Przykładowo, projekt g uzyskał sumarycznie 10 000 punktów i jego koszt wynosi 1000 złotych. Możemy rozłożyć jego koszt tak, aby każdy wyborca zapłacił 1/10 zł za jednostkę zadowolenia: wyborcy z pierwszej i drugiej grupy powinni zapłacić po 1 zł, ci z czwartej grupy płacą po 10 zł, a pozostali po 4 zł. Jest on zatem 1/10–opłacalny, czyli mniej opłacalny niż projekt b. W drugim kroku to właśnie g zostanie wybrany. Następnie reguła wybiera projekt f. Zwróćmy uwagę, że wyborcy z czwartej grupy nie mają już dostępnych środków, zatem koszt projektu f musi zostać pokryty przez wyborców z trzeciej i szóstej grupy. Wyborcy ci płacą po 2 zł, czyli $\lambda = 1/5$ za jednostkę zadowolenia. W następnych dwóch krokach reguła wybiera projekty e i c. W tym momencie reguła kończy działanie i zwraca jako wynik $\{b, c, e, f, g\}$.

Zauważmy, że budżet pozwoliłby dodatkowo sfinansować projekt a i h, natomiast wyborcy, którzy zagłosowali na te projekty, nie mają już wystarczających środków. Pokazuje to, że metoda równych udziałów może wybrać zbiór projektów, których sumaryczny koszt jest znacznie niższy niż dostępny budżet. Aby otrzymać regułę, która efektywnie wykorzystuje dostępne środki, możemy użyć jednej z kilku technik:
1. *Dopełnianie:* możemy uzupełnić wynik zwrócony przez metodę równych udziałów w inny sposób, np. zgodnie z metodą zachłanną.
2. *Skalowanie początkowego budżetu:* początkowo przypisujemy wyborcom nieco więcej pieniędzy niż równa część budżetu. Przypisujemy im taką kwotę, aby sumaryczny koszt projektów zwróconych przez metodę równych udziałów nie przekraczał oryginalnego budżetu k.

Twierdzenie 1. *Metoda równych udziałów jest proporcjonalna z dokładnością do jednego projektu.*

Dowód. Rozważmy grupę wyborców S i zbiór projektów $T \subseteq P$ taki, że $\sum_{p \in T} \mathrm{koszt}(p) \leqslant k/n \cdot |S|$ oraz $\sum_{p \in T} \min_{i \in S} u_i(p) = \beta$. Pokażemy, że zbiór projektów zwrócony przez metodę równych udziałów po powiększeniu o jeden projekt daje przynajmniej jednemu z wyborców z S zadowolenie przynajmniej β.

Zastanówmy się, jak zadziałałaby metoda równych udziałów, gdybyśmy wyborcom z S początkowo przypisali nieskończoną ilość pieniędzy: $k_i = \infty$ dla każdego $i \in S$. Rozważmy pierwszy moment, w którym któryś z wyborców z S,

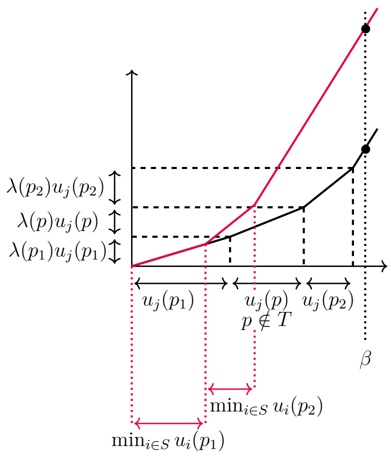


Diagram ilustrujący funkcję f z dowodu twierdzenia 1. Wykres kolorowy składa się z podzbioru kawałków o takim samym nachyleniu, jak kawałki wykresu czarnego. Aby otrzymać wykres kolorowy, pomijamy lub skracamy (zachowując ich nachylenie) niektóre kawałki czarnego

nazwijmy go j, użył więcej niż k/n złotych ze swojego początkowego budżetu. Załóżmy, że stało się to podczas kupowania projektu p'. Do tego momentu metoda działała tak samo, jak gdyby wyborcy z S mieli k/n złotych. Wystarczy więc pokazać, że dotychczasowo wybrany zbiór powiększony o projekt p' da wyborcy j zadowolenie co najmniej β.

W tym celu zdefiniujemy funkcję kosztu zadowolenia f: niech $f(x)$ oznacza cenę, którą wyborca j zapłacił za pierwszych x jednostek zadowolenia. Zakładamy tu, że projekty są podzielne: na przykład, jeżeli wyborca zapłacił x złotych za pierwszy projekt i otrzymał w zamian zadowolenie równe y, to $f(\gamma y) = \gamma x$ dla każdego $\gamma \in [0, 1]$. Funkcja f jest zilustrowana na rysunku obok (czarny wykres).

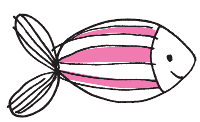
Zakładając nieskończony budżet wyborców z S, każdy projekt p popierany przez przynajmniej jednego z nich zostanie w którymś momencie wybrany; przyjmijmy, że jest wtedy $\lambda(p)$–opłacalny. Skoro metoda równych udziałów wybiera projekty, które minimalizują cenę za jednostkę zadowolenia, to funkcja f jest wypukła. Jest to też funkcja kawałkami liniowa. Zastanówmy się, jak oszacować z góry jej wartość w pewnym punkcie. Na pewno możemy to zrobić, biorąc wartość funkcji poskładanej z podzbioru „krótszych” kawałków o tym samym nachyleniu (funkcja oznaczona kolorem na rysunku obok). Możemy więc $f(\beta)$ oszacować przez:

$$f(\beta) = f\Big(\sum_{p\in T} \min_{i\in S} u_i(p)\Big) \leqslant \sum_{p\in T} \min_{i\in S} u_i(p)\lambda(p).$$

Z faktu, że $\sum_{i\in S} u_i(p)\lambda(p) \leqslant \text{koszt}(p)$, dostajemy oszacowanie:

$$\sum_{p\in T} \min_{i\in S} u_i(p)\lambda(p) \leqslant \sum_{p\in T} \min_{i\in S} u_i(p) \frac{\text{koszt}(p)}{\sum_{i\in S} u_i(p)} \leqslant \frac{\sum_{p\in T} \text{koszt}(p)}{|S|} \leqslant \frac{k}{n}.$$

Otrzymujemy, że $f(\beta) \leqslant k/n$. Oznacza to, że po wydaniu k/n złotych w wersji z nieograniczonym budżetem, czyli po kupieniu projektu p', wyborca j musi mieć zadowolenie co najmniej β. Przy ograniczonym budżecie wybrany zbiór projektów powiększony o p' też daje mu zatem takie zadowolenie. □



A jak wygląda to w praktyce? Wiele gmin próbuje różnymi sposobami równoważyć brak proporcjonalności metody zachłannej. Za priorytet uważane jest to, aby wśród realizowanych projektów znalazły się projekty z wszystkich dzielnic. W tym celu początkowy budżet dzielony jest między dzielnice (proporcjonalnie do liczby mieszkańców), a następnie reguła zachłanna uruchamiana jest w każdej dzielnicy oddzielnie. Ponadto z góry ustalona kwota przeznaczana jest na projekty ogólnomiejskie, które również są wybierane niezależnie od pozostałych.

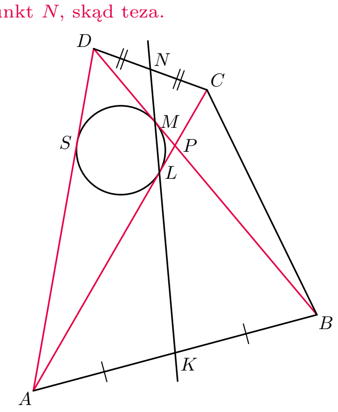
Podejście to ma jednak sporo wad. Po pierwsze, wcale nie rozwiązuje ono problemu proporcjonalności! Podział budżetu między dzielnice wymusza proporcjonalność tylko dla grup wyborców zdefiniowanych geograficznie, a nie rozwiązuje problemu dla innych grup. Na przykład, jeżeli w każdej dzielnicy 51% wyborców będzie głosować tylko na projekty rowerowe, pozostali zostaną z niczym. Ponadto taki podział jest często sztuczny, ponieważ wyborcy mogą przecież korzystać z projektów z różnych dzielnic. Sztuczna jest też klasyfikacja projektów na dzielnicowe i ogólnomiejskie oraz podział środków między te dwie kategorie.

Jakie problemy rodzi podział na projekty ogólnomiejskie i dzielnicowe, pokazuje przykład dwóch projektów zgłoszonych w Warszawie w 2021 roku, które miały być realizowane na tej samej ulicy – ulicy Modlińskiej. Pierwszy projekt dotyczący nasadzeń zieleni był projektem ogólnomiejskim. Kosztował 435 tys. zł i uzyskał 12 tys. głosów, z czego 4 tys. od mieszkańców Białołęki. Nie uzyskał on jednak finansowania. Drugi projekt dotyczył naprawy chodnika i był projektem dzielnicowym. Kosztował on więcej (630 tys. zł) i uzyskał dużo mniej głosów (niecałe 2 tys.). Paradoksalnie, to ten drugi projekt uzyskał finansowanie, bo konkurencja między projektami w tej dzielnicy była dużo mniejsza.

Rozwiązanie zadania M 1727.
Niech S będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt APD z bokiem AD. Korzystając z równości odcinków stycznych i zależności danej w zadaniu, dostajemy $BM = AS = AL$ oraz $PL = PM$. Wobec tego

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AL}{LP} \cdot \frac{PM}{MB} = 1.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menelaosa, zastosowanego do trójkąta APB, otrzymujemy więc współliniowość punktów K, L, M. Analogicznie dowodzimy, że na prostej LM leży punkt N, skąd teza.



Czy można było wybrać projekty lepiej? Sprawdźmy! Dzięki temu, że wyniki głosowania w niektórych miastach w Polsce są dostępne publicznie (na stronie pabulib.org), możemy przeprowadzić symulację: co by było, gdyby zamiast metody zachłannej miasta wykorzystywały metodę równych udziałów?

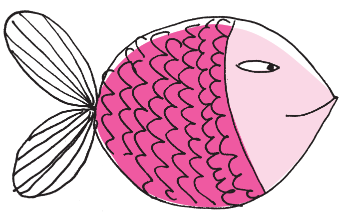
Porównamy tutaj dane łącznie z 17 instancji budżetu partycypacyjnego w 6 różnych miastach: Częstochowie (2020), Gdańsku (2020), Krakowie (2018–2021), Warszawie (2017–2021), Wrocławiu (2015–2018) i Zabrzu (2020–2021). W naszym zestawieniu znalazły się miasta różnej wielkości – od kilkunastu tysięcy głosujących w Zabrzu i Częstochowie do ponad 100 tysięcy w Warszawie. W Częstochowie, Gdańsku i Krakowie wyborcy przypisują projektom wartości punktowe; w Warszawie, Wrocławiu i Zabrzu głosowanie jest przeprowadzane przez aprobaty. Porównywać będziemy metodę równych udziałów (wersję ze skalowaniem budżetu) uruchamianą bezpośrednio w całym mieście, z regułą zachłanną uruchamianą osobno w dzielnicach, zgodnie z regulaminem danego miasta.

Dla wygody zaprezentujemy tutaj uśrednione wyniki dla każdego miasta, jednak wnioski z naszej analizy będą prawdziwe również dla każdej edycji osobno.

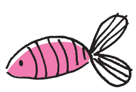
Przypuśćmy, że dla pewnego miasta reguła zachłanna zwróciła nam zbiór projektów W_{Z}, a metoda równych udziałów W_{RU}. Jak ocenić, który z nich jest lepszy? Najprostszym pomysłem wydaje się zmierzenie średniego poziomu zadowolenia wyborcy z wyników – czyli porównanie liczby

$$\mathrm{AVG}(W_{\mathrm{Z}}) = \sum_{i\in N} u_i(W_{\mathrm{Z}})/n \quad \text{i} \quad \mathrm{AVG}(W_{\mathrm{RU}}) = \sum_{i\in N} u_i(W_{\mathrm{RU}})/n.$$

Możemy również sprawdzić, ile procent wyborców uzyskuje lepsze zadowolenie z W_{Z} niż z W_{RU} ($\#(\mathrm{Z} > \mathrm{RU})$) i odwrotnie.



	miasto	$\mathrm{AVG}(W_{\mathrm{Z}})$	$\mathrm{AVG}(W_{\mathrm{RU}})$	$\#(\mathrm{Z} > \mathrm{RU})$	$\#(\mathrm{RU} > \mathrm{Z})$
głosow. w skali	Częstochowa	6,60	10,00	15%	48%
	Gdańsk	2,51	3,41	14%	44%
	Kraków	5,39	7,59	16%	70%
głosow. aprobaty	Warszawa	2 668 600	3 334 588	19%	58%
	Wrocław	866 909	1 007 896	14%	35%
	Zabrze	102 077	391 790	10%	42%



Jak widać, pomijając kwestię sprawiedliwości, metoda równych udziałów wydaje ten sam budżet efektywniej niż metoda zachłanna. To, że znacznie większy odsetek wyborców woli W_{RU} niż W_Z (od 3 do prawie 5 razy większy!), pokazuje, że zadowolenie wyborców jest jednocześnie równomierniej rozłożone.

Podobne wyniki zaobserwujemy, gdy będziemy mierzyć zadowolenie wyborcy jako *liczbę* zrealizowanych projektów, na które wyborca ten zagłosował. Wówczas wyniki będą się prezentować następująco:

miasto	$\mathrm{AVG}(W_{\mathrm{Z}})$	$\mathrm{AVG}(W_{\mathrm{RU}})$	$\#(\mathrm{Z} > \mathrm{RU})$	$\#(\mathrm{RU} > \mathrm{Z})$
Częstochowa	1,00	1,57	14%	49%
Gdańsk	1,06	1,52	12%	43%
Kraków	2,61	3,82	10%	69%
Warszawa	6,21	8,10	11%	61%
Wrocław	1,34	1,65	10%	33%
Zabrze	0,79	1,08	9%	37%

Widzimy, że niezależnie od metryki wyborcy byliby bardziej zadowoleni, gdyby do wyboru projektów zastosowano metodę równych udziałów. Łatwo sprawdzić, że metoda ta jest także sprawiedliwa wobec dzielnic (po tę analizę odsyłamy do dodatku, który zamieściliśmy na naszej stronie: `www.deltami.edu.pl`). Co więcej, metoda równych udziałów będzie się oczywiście zachowywać proporcjonalnie względem wszystkich spójnych grup wyborców – nie tylko tych wyznaczonych przez dzielnice, ale również np. rowerzystów, rodziców czy miłośników przyrody. Takich grup nie trzeba definiować a priori, ponieważ metoda potrafi je „wywnioskować” ze struktury głosów wyborców. Nie powinno nas także dziwić, że dla danych z Warszawy z 2021 roku metoda równych udziałów pozwoliłaby sfinansować wspomnianą wcześniej modernizację bieżni. Może już czas poddać pod głosowanie nie tylko projekty, ale także metodę, jaką są one wybierane?

Rozwiązanie zadania M 1728.
Oznaczmy $x = a - b$, $y = b - c$ i bez straty ogólności załóżmy, że $x, y \geqslant 0$. Założenie zadania można zapisać jako

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 \geqslant 2$$

lub równoważnie

$$x^2 + xy + y^2 \geqslant 1.$$

Teza zaś jest równoważna nierówności

$$x + y + x + y \geqslant 2,$$

czyli $x + y \geqslant 1$. Jednakże

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + y^2 + xy \geqslant$$
$$\geqslant x^2 + xy + y^2 \geqslant 1,$$

co kończy dowód.