



Prostopadłość prostych w przestrzeni

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zacniemy skromnie – od kąta między prostymi na płaszczyźnie. Jeśli proste ℓ_1 i ℓ_2 przecinają się, to dzielą płaszczyznę na cztery kąty: dwa o mierze $\varphi \in (0, \pi/2]$ i pozostałe dwa o mierze $\pi - \varphi \in [\pi/2, \pi)$. Na ogół przyjmujemy się $|\sphericalangle(\ell_1, \ell_2)| = \varphi$, chociaż druga możliwość też jest dopuszczalna. Kąt między prostymi równoległymi umownie ma miarę 0. Proste ℓ_1 i ℓ_2 są prostopadłe, gdy $\varphi = \pi - \varphi = \pi/2$.

W przestrzeni, jeżeli proste ℓ_1 i ℓ_2 leżą na wspólnej płaszczyźnie (co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy przecinają się lub są równoległe), to kąt między nimi definiujemy jak wyżej. W przeciwnym razie nazywamy je prostymi *skośnymi*. Zauważmy, że na płaszczyźnie przesunięcie równoległe prostych ℓ_1 i ℓ_2 nie zmienia kąta między nimi. To motywuje do wprowadzenia definicji miary kąta pomiędzy prostymi skośnymi – przesuujemy jedną z nich równoległe, tak by przecięła drugą, i postępujemy jak wyżej.

Dalsze rozważania rozpoczniemy od następującego, bardzo mocnego, twierdzenia. Jeśli opisany w nim przypadek ma miejsce, to mówimy, że prosta k i płaszczyzna Π są prostopadłe.

Twierdzenie 1. Jeśli prosta k jest prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych ℓ_1, ℓ_2 leżących na płaszczyźnie Π , to prosta k jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie.

Dowód. Wybierzmy na płaszczyźnie Π dowolną prostą ℓ i przesuńmy ją równoległe, tak by przechodziła przez punkt P przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2 . Niech $L \neq P$ leży na prostej ℓ . Punkty L_1 i L_2 na prostych, odpowiednio, ℓ_1 i ℓ_2 dobieramy tak, by punkt L był środkiem odcinka L_1L_2 (można nawet skonstruować te punkty za pomocą cyrkla i liniału, czego nietrudny dowód pozostawiam Czytelnikowi). Wybieramy punkty K i K' leżące na prostej k , tak by punkt P był środkiem odcinka KK' . Punkty K i K' są symetryczne względem prostych ℓ_1 i ℓ_2 , bo $k \perp \ell_1, \ell_2$. Z tego wynikają równości $|KL_1| = |K'L_1|$ i $|KL_2| = |K'L_2|$, a zatem trójkąty L_1L_2K i L_1L_2K' są przystające. Wobec tego $|LK| = |LK'|$, gdyż są to środkowe odpowiednich boków tych trójkątów. Z tego wynika, że trójkąty LPK i LPK' są przystające, więc $|\sphericalangle KPL| = |\sphericalangle K'PL| = \pi/2$. □

Kącik o takim tytule nie może obyć się bez bodaj najsłynniejszego twierdzenia o prostopadłości w przestrzeni:

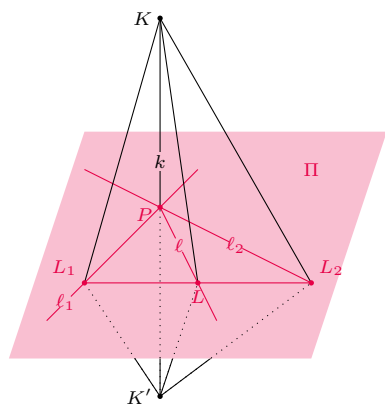
Twierdzenie 2 (o trzech prostopadłych). Prosta ℓ leżąca na płaszczyźnie Π jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do rzutu k' prostej k na płaszczyznę Π .

Dowód. Jeśli $k \parallel k'$, to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym razie proste k i k' przecinają się w jednym punkcie P na płaszczyźnie Π . Wybierzmy punkt $K \neq P$ na prostej k i niech K' będzie jego rzutem na płaszczyznę Π . Przez Π' oznaczmy płaszczyznę PKK' , a przez k'' – prostą KK' . Z prostopadłości $k'' \perp \Pi$ wynika, że $k'' \perp \ell$, gdyż $\ell \subset \Pi$.

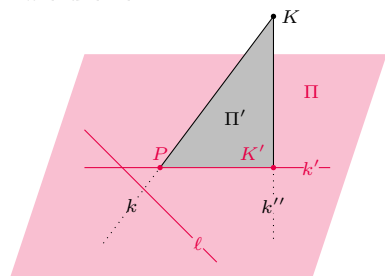
Jeśli $\ell \perp k$ lub $\ell \perp k'$, to prosta ℓ jest prostopadła do dwóch spośród prostych: k, k', k'' . Wobec twierdzenia 1 jest ona również prostopadła do trzeciej spośród tych prostych. □

do tego czworokątnu, jest styczna do ściany ABC w środku O okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że $|\sphericalangle DAS| = \pi/2$.

- Wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B czworokątnu $ABCD$ mają wspólny spodek S na krawędzi CD . Punkty K i L są rzutami punktu S na ściany ABC i ABD . Dowieść, że okrąg opisany na KLS przecina odcinek AB .



Twierdzenie 1



Twierdzenie 2

Wskazówki do zadań

- Rzuty prostych AD, BD i CD na płaszczyznę ABC zawierają wysokości trójkąta ABC . Należy skorzystać z twierdzenia 2, aby wykazać, że w tym czworokątnie każde dwie przeciwległe krawędzie są prostopadłe.
- Powinno być jasne, że wysokość czworokątnu przecina się w jednym punkcie. Takie czworokątny nazywamy ortocentrycznymi.
- Niech T będzie punktem styczności sfery z płaszczyzną ABD . Mamy stąd $ST \perp ABD$. Należy zauważyć, że $|AT| = |AO| = |BO| = |BT|$, a dalej rachunek kątów pokazuje, że $|\sphericalangle DAT| = \pi/2$.
- Z prostopadłości $AB \perp CD$ wynika, że istnieje płaszczyzna prostopadła do prostej AB , zawierająca prostą CD . Leżą na niej punkty K i L .

Zadania

- Ściana ABC czworokątnu $ABCD$ ma tę własność, że jej ortocentrum jest spodkiem wysokości tego czworokątnu, opuszczonej na tę ścianę. Udowodnić, że wszystkie ściany tego czworokątnu mają tę własność.
- Dany jest czworokątn $ABCD$, w którym $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAD|$, a sfera o środku S , dopisana