Nawijanie miodu

Jan TURCZYNOWICZ, Radost WASZKIEWICZ***

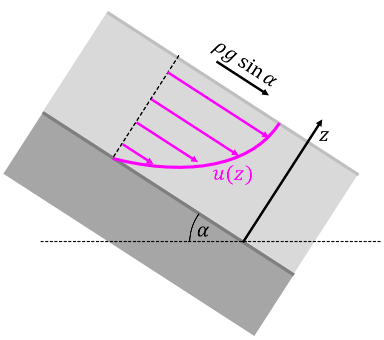
* Klub Naukowy Fenix, Warszawa
** Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Narzędzie, które nie ma nazwy

Rys. 1. Miodownik, na którym utrzymana jest znaczna ilość miodu

Медоносець po ukraińsku, *honey dipper* po angielsku – zgodnie z nazwą narzędzie (sztuciec?) do nakładania miodu, które w języku polskim (wedle wiedzy autora) nie ma dokładnego tłumaczenia. Kandydatem jest ewentualnie miodownik, chociaż miodownik to jednak przede wszystkim rodzaj ciasta. W naszym artykule będzie to sztuciec o nietypowej symetrii, której, w kuchennej szufladzie autora, dorównuje jedynie wałek do ciasta; nie przydaje się jednak ona do toczenia, tylko do utrzymywania miodu na miodowniku przy użyciu jego lepkości. Jak to możliwe, że miód pozostaje na miodowniku? Przecież z jednej strony miodownika popychamy miód w dół, a z drugiej pociągamy go do góry – czy te efekty nie powinny się znosić?

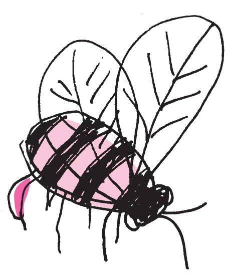
Rzeki z miodu i tarcie wewnętrzne cieczy



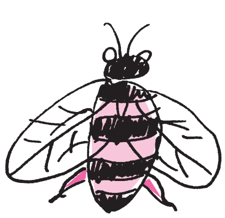
Rys. 2. Siły działające na miód na równi pochyłej

Żeby zrozumieć, w jaki sposób miód zachowuje się na obracającym się miodowniku, rozważmy prostszą sytuację: nieskończoną równię pochyłą pod kątem α, po której spływa warstwa miodu o grubości h. Skoro prędkość cieczy jest stała, to siły działające na nią muszą się równoważyć. Wiemy, że grawitacja ciągnie ciecz do dołu (z gęstością siły proporcjonalną do gęstości miodu ρ i przyspieszenia grawitacyjnego g), a więc musi działać jakaś dodatkowa równoważąca siła, działająca w górę równi. Składową siły grawitacji prostopadłą do równi równoważy gradient ciśnienia (taki sam jak w hydrostatyce: $p = \rho g z \cos\alpha$). Z racji symetrii ciśnienie nie zmienia się w kierunku równoległym do równi, nie może w takim razie zrównoważyć tej składowej siły grawitacji. Składowa siły grawitacji równoległa do równi jest równoważona przez *tarcie wewnętrzne cieczy*. Warstwy miodu bliżej wierzchu poruszają się szybciej niż te w pobliżu równi, a siła przeciwdziałająca tej różnicy prędkości to lepkość. Różnica sił pochodzących od warstwy poniżej i powyżej będzie wypadkową siłą od tarcia wewnętrznego działającą na warstwę pośrodku – ta siła zależy wobec tego od „różnicy różnic” prędkości. W rzeczywistości prędkość cieczy u zmienia się w sposób ciągły wraz ze wzrostem odległości z od równi, i gęstość siły wynikającej z lepkości możemy wyrazić jako $\mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} u(z)$, gdzie μ jest stałą materiałową określającą „niechęć” cieczy do różnic prędkości, nazywaną lepkością dynamiczną. Stałą μ (oznaczaną czasem też η) można zmierzyć na przykład metodą zaproponowaną w artykule Stanisława Bednarka *Wyznaczamy współczynnik lepkości cieczy* w Δ^{08}_{08}. Balans sił działających na ciecz w ogólnym przypadku wyraża równanie Naviera–Stokesa (o tym można przeczytać np. w artykule Witolda Sadowskiego *Równanie Naviera–Stokesa* w Δ^{12}_{14}). W naszym szczególnym przypadku, w którym u zależy wyłącznie od współrzędnej z, balans sił w kierunku równoległym do równi można zapisać wyjątkowo prosto jako

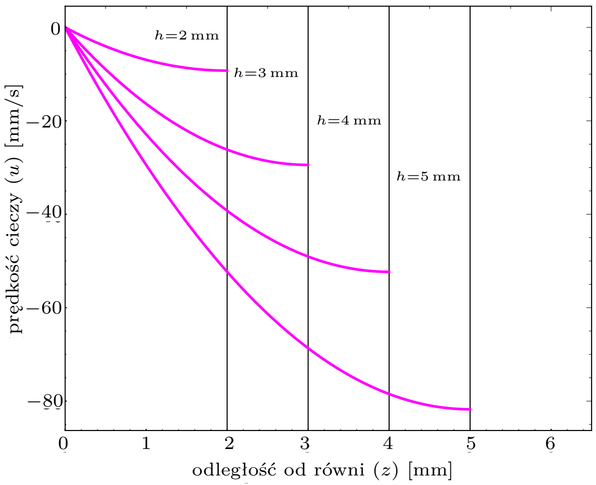
$$\mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} u(z) = \rho g \sin\alpha. \tag{1}$$



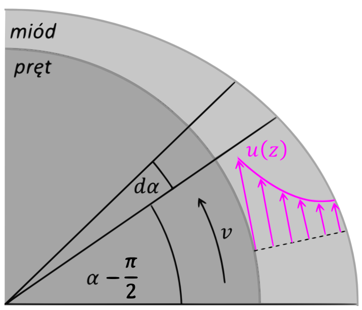
Wprawny Czytelnik zauważy bez trudu analogię w równaniu (1) do równania ruchu jednostajnie przyspieszonego. Tym razem jednak, zamiast położenia w czasie, badamy prędkość w zależności od odległości od równi. Można zatem wywnioskować, że musi ona zależeć kwadratowo od współrzędnej z i pozostaje nam ustalić dwie stałe. Dwa brakujące warunki opisują zachowanie cieczy na dnie i na powierzchni. Na dnie ciecz nie porusza się względem ścianki: $u(0) = 0$, z kolei na powierzchni znajdziemy warstwę cieczy, na którą lepkość działa tylko z jednej strony, więc żeby siły pozostały w równowadze, siła lepkości działająca na warstwę musi być zerowa: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} u(h) = 0$. Otrzymujemy następujące równanie na prędkość w zależności od wysokości:



$$u(z) = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z(z - 2h). \tag{2}$$



Rys. 3. Typowe rozkłady prędkości dla różnych grubości warstwy miodu na pochylonej równi. Krzywe narysowano dla lepkości kinematycznej μ/ρ równej $3{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, przy przechyleniu ścianki wynoszącym $\alpha = 45°$. Grube warstwy odpowiadają dużemu gradientowi prędkości w okolicy dna, a więc też dużej sile działającej na miód



Rys. 4. Wycinek pręta o szerokości dα. Można zauważyć, że wycinek wygląda jak równia pochyła analizowana w poprzednim akapicie

Miodociąg taśmowy

Korzystając z równania (2), możemy znaleźć rozkład prędkości dookoła obracającego się pręta, podobnie jak w artykule [2]. Mały wycinek dα takiego pręta wygląda przecież jak pochylony płaski taśmociąg (poruszający się ze stałą prędkością v równą iloczynowi promienia pręta a i prędkości kątowej pręta ω, rys. 4). W takim razie rozkład prędkości względnej w zależności od odległości od ścianki będzie dany przez równanie (2).

Naturalnym pytaniem w tej sytuacji jest: jaką objętość miodu można przetransportować takim miodociągiem taśmowym? Strumień objętości Q podróżujący do góry miodociągiem o szerokości w będzie więc całką rozkładu prędkości (2):

$$(3) \qquad Q = \int_0^h u(z)dz = wh\left(v - \frac{\rho g h^2 \sin\alpha}{3\mu}\right).$$

Jeśli chcemy uzyskać stabilny rozkład miodu dookoła naszego obracającego się miodownika, to dla każdego takiego małego taśmociągu o długości dα ilość miodu wpływającego na niego i wypływającego z niego musi być identyczna. W takim razie $Q(\alpha) = Q_0$, co w połączeniu z równaniem (3) daje nam rozkład grubości w zależności od kąta. Rysując kontur $Q(\alpha, h) = Q_0$ dla kilku wartości Q_0 (rys. 5), można zauważyć dwa rodzaje konturów – zamknięte, dające fizyczne rozwiązania, i otwarte, które dążą do nieskończoności dla pewnych α i nie mają fizycznej interpretacji. Druga obserwacja jest taka, że dla fizycznych rozwiązań grubość warstwy rośnie wraz z Q_0 (istotnie, dla na przykład $\alpha = 0$ funkcja $Q(h)$ jest monotoniczna, bo jest wielomianem o dodatnich współczynnikach).

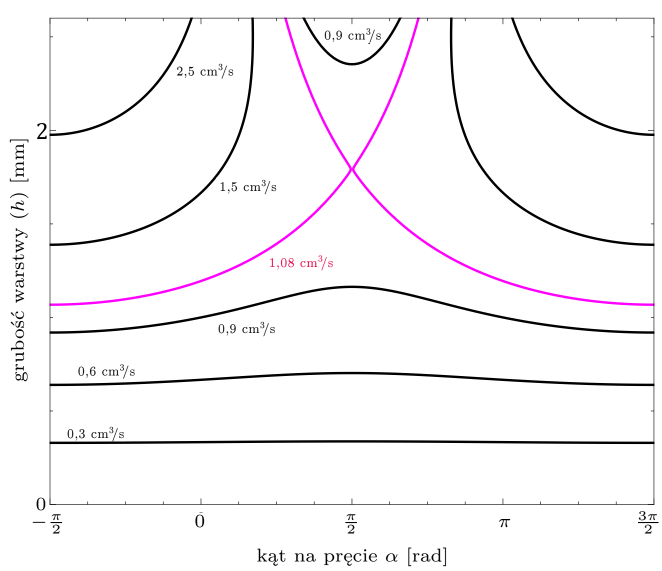
Znalezienie największej objętości miodu, dla której istnieje stabilny rozkład dookoła pręta, okazuje się zatem równoważne ze znalezieniem największego Q_0, dla którego istnieje zamknięty kontur $Q(h, \alpha) = Q_0$. Warunkiem koniecznym dla istnienia takiego konturu jest istnienie h, dla którego $Q = Q_0$ dla każdego α. Dla ustalonego α możemy znaleźć $h = h_{\mathrm{crit}}$, dla którego $Q(h, \alpha)$ jest największe. Różniczkując równanie (3) ze względu na h przy stałym α, otrzymujemy warunek na h_{crit}:

$$(4) \qquad 0 = w\left(v - \frac{h_{\mathrm{crit}}^2 \rho g \sin\alpha}{\mu}\right).$$

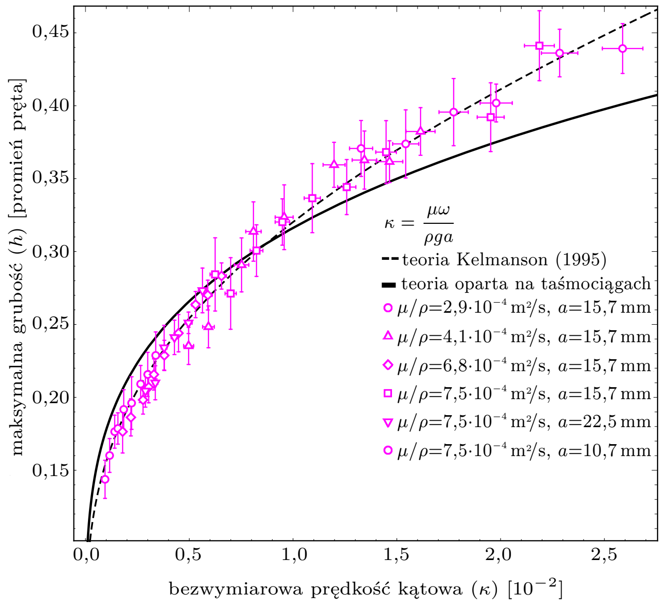
Jeśli $\sin\alpha > 0$, możemy rozwiązać równanie (4) na h_{crit} i wstawiając do (3), otrzymujemy maksymalną wartość $Q = Q_{\mathrm{crit}}$ dla ustalonego α (dla $\sin\alpha < 0$ wszystkie wartości Q są osiągalne):

$$(5) \qquad Q_{\mathrm{crit}} = \frac{2}{3} vw \sqrt{\frac{\mu v}{\rho g \sin\alpha}}.$$

Q_{crit} osiąga najmniejszą wartość dla $\alpha = \pi/2$, kiedy $\sin\alpha = 1$. Wynika stąd, że maksymalna wartość Q_0, dla której istnieje zamknięty kontur $Q(h, \alpha) = Q_0$, wynosi co najwyżej $Q_{\max} = \frac{2}{3} vw \sqrt{\frac{\mu v}{\rho g}}$. Okazuje się, że $Q_0 = Q_{\max}$ rzeczywiście daje szukany kontur (co wynika z ciągłości $Q(h, \alpha)$), zaznaczyliśmy go kolorem na wykresie 5. Zaskakujące jest to, że dla tego konturu pojawia się dzióbek (ang. *cusp*) dla $\alpha = \pi/2$, co jest bardzo rzadką sytuacją w mechanice płynów. W naszym przypadku osobliwość ta znika, gdy uwzględnimy napięcie powierzchniowe (co niestety znacznie komplikuje obliczenia).



Rys. 5. Kontury dla $Q_0 = \{1{,}5,\ 2{,}5,\ 3,\ 3{,}4,\ 3{,}8,\ 4{,}7\}\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$, część daje fizyczne rozwiązania, część dąży do nieskończoności. Przyjęliśmy $\mu/\rho = 3{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, $w = 1\,\mathrm{cm}$, $v = 9\,\mathrm{cm/s}$



Rys. 6. Wyniki naszych pomiarów maksymalnej grubości warstwy wyrażonej w wielokrotnościach promienia pręta. Punkty pomiarowe są rezultatem zmiany wszystkich trzech istotnych parametrów układu

Chwila na analizę wymiarową

Wracając do równania (1), widzimy, że dla naszego problemu istotna jest wielkość $\rho g/\mu$ i, o ile utrzymamy ją stałą, możemy zmieniać ρ, g, μ bez zmiany rozkładu prędkości cieczy. Popularną techniką w hydrodynamice jest wyrażanie równań we współrzędnych bezwymiarowych: jeśli będziemy wyrażać prędkość cieczy jako wielokrotność q prędkości pręta v, a odległość od powierzchni pręta jako wielokrotność s promienia pręta a, to równanie (1) przyjmie postać

$$\frac{\mu v}{\rho g a^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}q(s) = \sin\alpha. \tag{6}$$

Dodatkowo, korzystając z warunku $v = \omega a$, dochodzimy do wniosku, że maksymalna możliwa grubość cieczy utrzymująca się na miodowniku, mierzona w wielokrotnościach grubości pręta, zależy tylko od jednego parametru $\kappa = \mu\omega/(\rho g a)$, który możemy interpretować jako bezwymiarową prędkość kątową.

Sprawdzamy nasze przewidywania

Na ile przybliżenie walca przez wiele krótkich równi pochyłych ma sens? Czy napięcie powierzchniowe istotnie zaburza nasze obserwacje? Możemy to sprawdzić eksperymentalnie, badając zachowanie lepkiej cieczy (mieszaniny gliceryny z wodą o lepkości $\mu/\rho \in \langle 3\cdot 10^{-4}, 7{,}5\cdot 10^{-4}\rangle\ \mathrm{m^2/s}$) na obracającym się walcu (zobacz rysunek A na okładce). Pręt jest obracany za pomocą silnika prądu stałego z przekładnią, co umożliwia łatwą zmianę prędkości kątowej pręta ω. W układzie można wymieniać pręty w celu zmiany promienia pręta a oraz używać cieczy o różnej lepkości μ i gęstości ρ. W pomiarach wyznaczano maksymalny możliwy promień konturu na pionowym fragmencie pręta dla danej wartości κ.

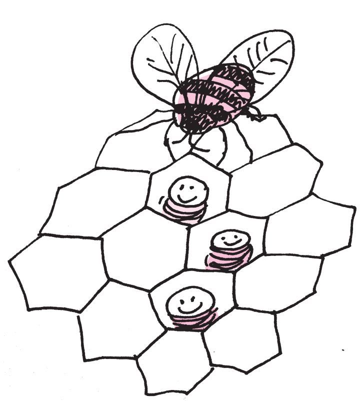
Okazuje się, że nasza teoria oparta na taśmociągach działa całkiem nieźle (rys. 6), ale wciąż można ją znacznie poprawić. Przyjrzyjmy się jeszcze raz prętowi z miodem (rys. 4). Warstwy cieczy bliżej środka pręta mają na rysunku mniejszy obwód niż te dalej od pręta, co wpływa na wartość siły lepkości. Analizę uwzględniającą wpływ krzywizny pręta zaprezentował M. Kelmanson w artykule [1]. Zwiększa to znacznie poziom skomplikowania rozwiązania, jednak zapewnia jeszcze lepsze wyniki (przerywana czarna linia). Tak jak można by się spodziewać, wpływ krzywizny staje się bardziej istotny dla małych promieni obracającego się pręta (małe a), czyli dla dużych wartości κ.

Na okładce (rys. B) można zobaczyć kontur utworzony przez miód nałożony na nasz układ doświadczalny.

Podziękowania

Powyższe badania są wynikiem prac prowadzonych przez drużynę reprezentacji Polski nad zadaniem *Saving Honey*, które jest częścią Międzynarodowego Turnieju Młodych Fizyków 2022. Drużyna w składzie: Jan Turczynowicz (kapitan), Rafał Bryl, Mikołaj Czarnecki, Igor Kumela, Maciej Dąbkowski, Radost Waszkiewicz (opiekun), dr Łukasz Gładczuk (opiekun), prowadziła swoje prace w Klubie Naukowym Fenix w Warszawie.

Autorzy dziękują organizatorom programu Ochota na Naukę (grant w sesji wiosennej 2022), opiekunom warsztatu na wydziale Fizyki UW (a w szczególności Piotrowi Zbinkowskiemu) oraz dr. hab. Maciejowi Lisickiemu za komentarze do pracy.



Bibliografia

[1] Kelmanson, Mark A.: *Theoretical and experimetal analyses of the maximum-suppotable fluid load on a rotating cylinder*, "Journal of Engineering Mathematics" 29 (1995), S. 271–285.
[2] Moffatt, H. K.: *Behaviour of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder*, "Journal de Mecanique" 16 (1977).