Wzory Viète'a

*Bartłomiej BZDĘGA**

*Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ze szkolnych lekcji wiemy, że jeśli x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c, to $x_1+x_2=-b/a$ i $x_1x_2=c/a$. Wzory te można uogólnić na wielomian dowolnego stopnia n. Załóżmy, że wielomian $a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ ma pierwiastki $x_1,x_2,\ldots,x_n$, przy czym każdy z pierwiastków jest tu wymieniony tyle razy, ile wynosi jego krotność. Po wymnożeniu lewej strony równości

$$a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

podzieleniu obustronnie przez $(-1)^ka_n$ i porównaniu współczynników przy x^k otrzymamy

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}\quad \text{dla}\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Szczególnie elegancko prezentują się te równości dla $k=1$ oraz $k=n$:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\qquad x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Do dalszych rozważań przydadzą się jeszcze przypadki $k=2$ i $k=n-1$:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},\qquad \sum_{i=1}^{n} x_1\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n=(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}$$

(uwaga: zapis $x_1\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n$ oznacza iloczyn liczb $x_1,x_2,\ldots,x_n$ z wyjątkiem x_i nawet dla $i=1$ oraz $i=n$).

Jeżeli $x_1,x_2,\ldots,x_n\neq 0$ (równoważnie: $a_0\neq 0$), to możemy podzielić stronami równość dla $k=n-1$ przez równość dla $k=n$. Otrzymamy wtedy

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=-\frac{a_1}{a_0}.$$

Ze wzorów dla $k=1$ i $k=2$ wynika równość

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\frac{a_{n-1}^2-2a_na_{n-2}}{a_n^2}.$$

Powyższe wzory wyglądają szczególnie ładnie, gdy wielomian, do którego je stosujemy, jest unormowany, czyli $a_n=1$.

Warto pamiętać, że wzory Viète'a działają w obie strony – możemy za ich pomocą nie tylko badać własności pierwiastków wielomianu, ale również stworzyć wielomian, którego dane liczby są pierwiastkami.

Zadania

1. Wyprowadzić wzór na sumę sześcianów pierwiastków wielomianu x^3+ax^2+bx+c.
2. Wielomian $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+x_0$ stopnia $n\geqslant 2$ ma n pierwiastków rzeczywistych (liczymy z uwzględnieniem krotności). Dowieść, że jeśli $a_{n-1}=a_{n-2}=0$, to $P(x)=a_nx^n$.
3. Jeden z pierwiastków wielomianu x^3+px+q jest równy iloczynowi dwóch pozostałych. Udowodnić, że ten pierwiastek jest równy $p-q$.
4. Liczby x_1, x_2 i x_3 są pierwiastkami wielomianu x^3+ax^2+bx+c. W zależności od a, b, c wyznaczyć wielomian unormowany, którego pierwiastkami są x_2x_3, x_3x_1 i x_1x_2.
5. Liczby rzeczywiste $a,b,c,d\neq 0$ spełniają równości $a+b+c+d=0$ i $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$. Udowodnić, że wśród liczb a, b, c, d są dwie pary liczb przeciwnych.
6. Liczby $a,b,c\neq 0$ są całkowite. Udowodnić, że jeśli suma $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}$ jest liczbą całkowitą, to każdy jej składnik jest liczbą całkowitą.
7. Dla liczb całkowitych dodatnich n i k, spełniających nierówność $n\geqslant k$, niech $S(n,k)$ oznacza sumę wszystkich iloczynów postaci $a_1a_2\ldots a_k$, w których $a_1,a_2,\ldots,a_k$ są różnymi liczbami ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Wykazać, że $S(n,k)<(n+1)!$.

Wskazówki do zadań

1. Wskazówka znajduje się w kąciku nr 13 (Δ_{20}^1).
2. Skorzystać ze wzoru na sumę kwadratów pierwiastków wielomianu.
3. Dodać stronami wzory Viète'a na p i $-q$, a po wyłączeniu iloczynu pierwiastków przed nawias zauważyć, że w nawiasie mamy 1 na mocy wzoru na sumę pierwiastków.
4. Odpowiedź: $x^3-bx+acx^2-c^2$.
5. Niech $x^4+w_3x^3+w_2x^2+w_1x+w_0$ będzie wielomianem, którego pierwiastkami są a, b, c, d. Z danych równości wnioskujemy, że $w_3=0$ i $w_1=0$, więc liczby a, b, c, d są pierwiastkami wielomianu $x^4+w_2x^2+w_0$.
6. Należy zauważyć, że wielomian unormowany, którego pierwiastkami są liczby $\frac{bc}{a}$, $\frac{ca}{b}$ i $\frac{ab}{c}$, ma współczynniki całkowite. Na mocy twierdzenia o pierwiastkach wymiernych, każdy pierwiastek wymierny wielomianu unormowanego o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.
7. Liczba $S(n,k)$ jest współczynnikiem przy x^{n-k} w wielomianie $(x+1)(x+2)\ldots(x+n)$. Suma współczynników wielomianu P jest równa $P(1)$.