Poznajmy topologię przez dotyk

*Michał MIŚKIEWICZ**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW; Instytut Matematyczny PAN

Aksjomaty topologii:

(T1) Zbiory $\emptyset$ i X są otwarte.

(T2) Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest otwarta.

(T3) Przecięcie dwóch zbiorów otwartych jest otwarte.

Literatura:

Kazimierz Kuratowski, *Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs* (1922) bibliotekanauki.pl/articles/1385860

A.W. Archangielskij, W.W. Fedorczuk, *General Topology I. Basic Concepts and Constructions* (1990) (zwłaszcza rozdziały 1.3, 1.4, 3.1)

David R. MacIver, *Different ways of defining topologies* (2013) drmaciver.com/2013/02/different-ways-of-defining-topologies/

Trudno jest *dotknąć* topologii. Łatwo jest ją za to zdefiniować: standardowo topologię na zbiorze X opisuje się jako rodzinę podzbiorów X (zwanych otwartymi) spełniającą aksjomaty podane na marginesie. Definicja funkcji ciągłej $f\colon X \to Y$ również nie sprawia problemu: jest to funkcja, dla której przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq Y$ jest zbiorem otwartym $f^{-1}(U) \subseteq X$.

Sporą trudność może jednak sprawić zrozumienie, w jaki sposób powyższa definicja odpowiada intuicji „rysowania wykresu funkcji bez odrywania ołówka". Związek pojęcia zbioru otwartego ze strukturą, którą staramy się w ten sposób opisać, nie jest oczywisty. Bez wątpienia odpowiedni trening matematyczny pozwala wyrobić odpowiednie intuicje oraz docenić piękno i głębię topologii; postaram się jednak przekonać Czytelnika, że podstawy topologii można zbliżyć do intuicji. Posłuży do tego idea pochodząca od Kazimierza Kuratowskiego, odpowiednio przeformułowana w celach dydaktycznych przez późniejszych autorów; po dalsze szczegóły warto sięgnąć do pozycji podanych na marginesie.

Relacja dotykania

Zacznijmy od opisu topologii liczb rzeczywistych. Powiemy, że liczba x *dotyka* zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnego naturalnego n istnieje liczba $y \in A$ spełniająca $|x - y| < \frac{1}{n}$. W ten sposób odcinka otwartego $(0, 1)$ dotykają na przykład liczby $\frac{1}{2}$ oraz 1, ale już nie $\frac{3}{2}$. Czytelnik może sprawdzić, że wprowadzona tu relacja spełnia warunki podane niżej. Okaże się później, że do mówienia o ciągłości nie trzeba nic więcej.

Definicja. Przestrzenią topologiczną nazwiemy zbiór X wraz z relacją *dotykania* spełniającą następujące aksjomaty:

(D1) Żaden punkt nie dotyka zbioru pustego $\emptyset$.

(D2) Jeśli $x \in A$, to x dotyka A.

(D3) Punkt x dotyka $A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy dotyka któregoś ze zbiorów A lub B.

(D4) Jeśli punkt x dotyka A, a każdy punkt A dotyka B, to x dotyka też B.

Intuicyjnie można myśleć, że punkt x dotyka zbioru A, jeśli zbiór ten posiada punkty dowolnie blisko x – co zresztą odpowiada relacji wprowadzonej na $\mathbb{R}$. Powinno to wystarczyć, by nieco uwiarygodnić powyższe warunki.

Jeśli dane są dwie przestrzenie topologiczne X, Y (czyli dwa zbiory, każdy ze swoją relacją dotykania), to możemy już mówić o ciągłości funkcji $f\colon X \to Y$. Intuicyjnie rzecz biorąc, funkcja ciągła to taka, która nie rozrywa obiektów stykających się, co zresztą łatwo uchwycić w definicji:

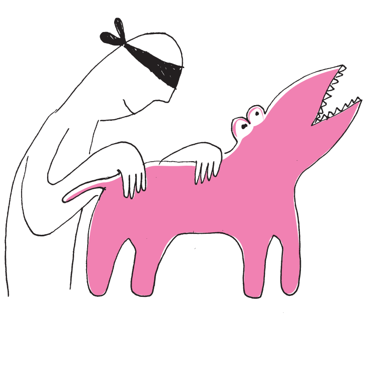
Ciągłość. Funkcja ciągła $f\colon X \to Y$ to funkcja spełniająca następujący warunek: jeśli punkt $x \in X$ dotyka zbioru $A \subseteq X$, to obraz punktu $f(x)$ dotyka obrazu zbioru $f(A)$.

Subiektywny przegląd pojęć topologicznych

Wszystkie pojęcia podane niżej posiadają prostą charakteryzację (choć niekoniecznie *konstrukcję*) opartą na definicji ciągłości. Nic jednak nie szkodzi, by podać ich definicje w terminach relacji dotykania.

Spójność. Przestrzeń topologiczną X nazwiemy niespójną, jeśli można ją przedstawić jako sumę dwóch niepustych zbiorów $X = A \cup B$ w taki sposób, że żaden punkt A nie dotyka B i vice versa. W przeciwnym przypadku mówimy, że X jest spójna.

Podprzestrzeń. Jeśli X' jest podzbiorem przestrzeni topologicznej X, to relację dotykania na X można ograniczyć do punktów X' i podzbiorów X', w ten sposób nadając X' charakter (pod)przestrzeni topologicznej.



Iloraz. Załóżmy, że na przestrzeni topologicznej X dana jest relacja równoważności $\sim$, którą będziemy interpretować jako przepis na sklejanie: punkty $x, y \in X$ sklejamy, jeśli $x \sim y$. Definiujemy wtedy zbiór $X/\sim$, którego elementami są klasy abstrakcji $[x]$ punktów X (zob. kolorowy tekst poniżej), wraz z funkcją $q\colon X \to X/\sim$ zadaną wzorem $q(x) = [x]$. Przyjmijmy, że jeśli x dotyka A, to $q(x)$ dotyka $q(A)$; przyjmijmy też, że nie zachodzą dotknięcia inne niż wynikające z tej zasady. Wówczas $X/\sim$ jest przestrzenią topologiczną (tzw. *przestrzenią ilorazową*), a q jest funkcją ciągłą (tzw. *przekształceniem ilorazowym*).

Klasa abstrakcji $[x]$ to zbiór tych wszystkich $y \in X$, dla których $x \sim y$. Wprost z definicji wynika, że klasy abstrakcji dwóch elementów są albo tożsame, albo rozłączne. Dla przykładu, jeśli w zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ rozpatrzymy relację $m \sim n \iff 3 \mid m - n$, to są trzy klasy abstrakcji: $\{0, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$.

Podany tu opis dotykania w $X/\sim$ oddaje pewną intuicję – po sklejeniu punkt x dotyka tego, co wcześniej, oraz tego, czego dotykały punkty z nim sklejone – ale może się wydawać mało bezpośredni. Można jednak ten sam opis sformułować wprost: $\tilde{x}$ dotyka $\tilde{A}$, jeśli któryś punkt zbioru $q^{-1}(\tilde{x})$ dotyka $q^{-1}(\tilde{A})$.

Przykłady

Czytelnik *Delty* spotkał się zapewne z topologią w kontekście wycinania i sklejania, jak w artykule *Powierzchnie: zajęcia praktyczno-techniczne* z Δ^{10}_{08}. Jeśli tak, to może odetchnąć z ulgą, że do ścisłego opisu takich rozumowań wystarczą podane przed chwilą proste konstrukcje. Tutaj przedstawię kilka najprostszych przykładów konstrukcji przestrzeni topologicznych, by było wiadomo, jak to działa.

Topologia dyskretna. Na dowolnym zbiorze D możemy określić relację dotykania przez przyjęcie, że każdy punkt dotyka tylko i wyłącznie tych zbiorów, do których należy. Powstałą przestrzeń topologiczną zwykło się nazywać przestrzenią dyskretną. Łatwo sprawdzić, że każda funkcja $f\colon D \to X$ (w dowolną przestrzeń topologiczną X) jest wówczas ciągła. Natomiast jeśli X jest spójna, to funkcja $f\colon X \to D$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest stała.

Podaną tu charakteryzację funkcji ciągłych w przestrzeń dyskretną można przyjąć za alternatywną definicję spójności (zob. zadanie 1).

Płaszczyzna. Podobnie jak dla prostej rzeczywistej definiujemy, że punkt (p_1, p_2) dotyka zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$, jeśli dla dowolnego naturalnego n istnieje punkt $(q_1, q_2) \in A$ spełniający $\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} < \frac{1}{n}$. Warto się przekonać, że użycie innego sensownego wzoru na odległość nic nie zmieni, otrzymana przestrzeń topologiczna będzie taka sama (zadanie 2).

Definicję podobną do tej dla $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ możemy przyjąć zawsze, gdy na badanym zbiorze dysponujemy pojęciem odległości. Mówimy wtedy o przestrzeni metrycznej lub metryzowalnej – zależnie od tego, jak bardzo chcemy zaznaczyć wyjściowe pojęcie odległości.

Okrąg. Okrąg jednostkowy, czyli podzbiór płaszczyzny $\mathbb{S} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, dziedziczy relację dotykania określoną wyżej na $\mathbb{R}^2$.

Okrąg inaczej. Niech K będzie odcinkiem $[0, 1]$ ze sklejonymi końcami. Ściślej, na odcinku $[0, 1]$ – rozumianym jako podprzestrzeń $\mathbb{R}$ – wprowadźmy relację równoważności, w której $0 \sim 1$ (i oczywiście $x \sim x$ dla każdego $x \in [0, 1]$). Następnie oznaczmy przestrzeń ilorazową $K := [0, 1]/\sim$. Choć niekoniecznie to *widać*, K jest okręgiem.

Zdanie to nie brzmi ściśle, ale możemy je uzasadnić! W tym celu określmy funkcję $f\colon [0, 1] \to \mathbb{S}$ wzorem $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Oczywiście $f(0) = (1, 0) = f(1)$, co pozwala określić funkcję $\overline{f}\colon K \to \mathbb{S}$ spełniającą $\overline{f}([x]) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Co więcej, łatwo sprawdzić, że $\overline{f}$ jest bijekcją oraz funkcją ciągłą (zob. zadanie 4).

W tym konkretnym przypadku możemy się nawet przekonać, że zachodzi równoważność: $\tilde{x}$ dotyka $\tilde{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\tilde{x})$ dotyka $f(\tilde{A})$. Bijekcję o takiej własności nazywamy *homeomorfizmem*. Istnienie homeomorfizmu $f\colon K \to \mathbb{S}$ oznacza, że K i $\mathbb{S}$ są nierozróżnialne jako przestrzenie topologiczne. Wyjaśnia to, dlaczego K zasługuje na miano okręgu, chociaż na okrąg nie wygląda.

Dotyk a topologia

Przedstawione tu omówienie to dużo, albo nawet za dużo, jak na pierwsze zetknięcie z topologią. Na pewno jednak niektórzy Czytelnicy dobrze znają tę dziedzinę i zadają sobie pytanie, jak relacja dotykania ma się do standardowej formalizacji topologii. Spieszę z wyjaśnieniem.

Otóż zbiór X z relacją dotykania pozwala zdefiniować operację domknięcia:
$$\overline{A} := \{x \in X : x \text{ dotyka } A\} \quad \text{dla } A \subseteq X.$$
Własności operacji $A \mapsto \overline{A}$ łatwo odczytać z aksjomatów dotykania:

- **(C1)** $\overline{\emptyset} = \emptyset$
- **(C2)** $A \subseteq \overline{A}$
- **(C3)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- **(C4)** $A \subseteq \overline{B} \;\Rightarrow\; \overline{A} \subseteq \overline{B}$

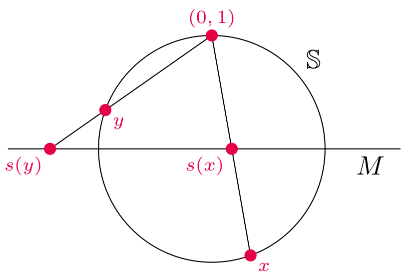
I to właśnie jest aksjomatyka topologii zaproponowana przez Kazimierza Kuratowskiego. Z pewną drobną zmianą: aksjomatyka Kuratowskiego zastępuje warunek (C4) warunkiem (C4′) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Jednak nietrudno się przekonać, że zestawy (C 1,2,3,4) i (C 1,2,3,4′) są równoważne.

A jak stąd przejść do rodziny zbiorów otwartych? Definiujemy mianowicie zbiory domknięte jako te zbiory A, dla których $\overline{A} = A$, a zbiory otwarte jako dopełnienia zbiorów domkniętych. Można sprawdzić, że tak określona rodzina zbiorów otwartych spełnia aksjomaty (T 1,2,3) z początku artykułu, jak również – że cały ten proces „tłumaczenia" da się odwrócić.

Czy warto tłumaczyć całą topologię na język dotykania? Na pewno nie. A czy warto podeprzeć się alternatywną formalizacją, by uzyskać jaśniejszy obraz tej wspaniałej dziedziny? Odpowiedź należy do Czytelnika.

Zadanie 1. Weźmy zbiór $C = \{0, 1\}$ z topologią dyskretną. Sprawdzić, że przestrzeń X jest niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niestała funkcja ciągła $f\colon X \to C$.

Zadanie 2. Przekonać się, że w definicji dotykania na $\mathbb{R}^2$ użycie dowolnego ze wzorów na odległość:
$d_2(p, q) := \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$, $d_1(p, q) := |p_1-q_1|+|p_2-q_2|$,
$d_\infty(p, q) := \max(|p_1-q_1|, |p_2-q_2|)$, prowadzi do tej samej relacji dotykania (choć możliwe, że dla tych samych p i n trzeba inaczej dobrać punkt q).



Rzut stereograficzny z zadania 3

Zadanie 3. Niech $M = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie zbiorem $\mathbb{R}$ wzbogaconym o dodatkowy element oznaczony wymownym symbolem ∞. Przyjmijmy, że ∞ dotyka wszystkich nieograniczonych podzbiorów $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz (wyłącznie) wszystkich zbiorów zawierających ∞. Ponadto każdy z punktów $x \in \mathbb{R}$ dotyka tych zbiorów, które posiadają punkty dowolnie blisko x (podobnie jak dla $\mathbb{R}$). Uzasadnić, że rzut stereograficzny $s\colon \mathbb{S} \to M$ (posyłający punkt $(0, 1)$ na punkt ∞) jest homeomorfizmem.

Zadanie 4. Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$. Wykazać istnienie (dokładnie jednej) funkcji ciągłej $\overline{f}\colon X/\!\sim\, \to Y$ takiej, że $f(x) = \overline{f}([x])$ dla wszystkich $x \in X$.

Zadanie 5. Wykazać, że pojedynczy aksjomat

$$\textbf{(C0)} \quad A \cup \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A \cup B} \smallsetminus \overline{\emptyset}$$

jest równoważny zestawowi aksjomatów (C 1,2,3,4′) (jak również (C 1,2,3,4)).

Szkice rozwiązań zadań zamieszczamy na str. 15.

O książce *Matematyka z różnych stron widziana*

*Paweł STRZELECKI**

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Dawno nie miałem w ręku książki, której tytuł tak dobrze oddawałby jej zawartość i charakter. W niezbyt długim tekście trudno oddać jej pełną sprawiedliwość (należy ją po prostu przeczytać i przeżyć, najlepiej stopniowo, nie od razu).

Matematyka z różnych stron widziana jest zbiorem kilkudziesięciu artykułów i esejów, stanowiących w większości zapisy wybranych odczytów wygłaszanych przez ponad 30 lat na Szkołach Matematyki Poglądowej. Szkoły organizowane są przez Ośrodek Kultury Matematycznej założony przez grupę oddanych matematyce entuzjastów skupioną wokół prof. Marka Kordosa. Książka jest więc, po pierwsze, dokumentem niezwykłej wieloletniej działalności związanej z najlepiej pojętym upowszechnianiem nauki. Otóż nauka nie może istnieć bez rozmowy – i to zarówno rozmowy uczonych tej samej specjalności między sobą, jak i z koleżankami i kolegami z odleglejszych rejonów świata nauki, a także z tymi, którzy do nich za chwilę dołączą, z tymi, którzy po prostu zostaną szeregowymi użytkownikami matematyki (lub innej dyscypliny), a wreszcie całą rzeszą rozsądnych ludzi, którzy z licznych względów chcieliby wiedzieć, *co w naukowej trawie piszczy.*

Nie jest wcale rzeczą jasną, jak takie dialogi mają wyglądać i jak je prowadzić. Jak pisze sam Marek Kordos w tekście, który zamyka książkę – prowadząc Czytelnika od Lewisa Carrolla i jego Alicji po hipotezę geometryzacyjną Thurstona i medal Fieldsa Griszy Perelmana – i jest zapisem jego odczytu w Nowym Sączu z okazji pierwszego wręczenia dyplomów absolwentom tamtejszego Kolegium Nauczycielskiego: trudnością, z którą musiał się jako prelegent zmierzyć,

> *…był fakt, że należało mówić o matematyce, a w uroczystości mieli wziąć udział (i wzięli) ludzie o bardzo różnym stopniu oswojenia z tą dyscypliną. Byli wybitni matematycy polscy (w tej liczbie ówczesny Rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego), ale też sądeccy parlamentarzyści i najznakomitsi przedstawiciele nowosądeckiego Ratusza (z Prezydentem Miasta na czele), sądecka Hierarchia Kościelna, wykładowcy Kolegium (a więc także muzycy, sportowcy, psychologowie, angliści itd.), nauczyciele szkolni, studenci i liczna gawiedź (bo rzecz odbywała się w bardzo pojemnej ratuszowej auli, tej z przepięknym piecem kaflowym). Jak powiedzieć coś, czego bez znudzenia mogliby wysłuchać oni wszyscy?*

Książka w istocie jest świadectwem wielowątkowej, wielowymiarowej, zespołowo udzielonej i, co ważne, spójnej odpowiedzi na ostatnie pytanie. Jak pisze jeden z autorów, Zbigniew Marciniak:

> *Matematyka jest dla mnie częścią przyrody. Podobnie jak ludzie zajmujący się innymi dyscyplinami nauki, matematyk stara się odkryć prawa opisujące ten fragment rzeczywistości. Matematyka posiada przy tym szczególny urok: odkrywcy dana jest od razu „cała” prawda. Twierdzenie, poprawnie udowodnione dwa tysiące lat temu, pozostaje do dziś tak samo prawdziwe.*