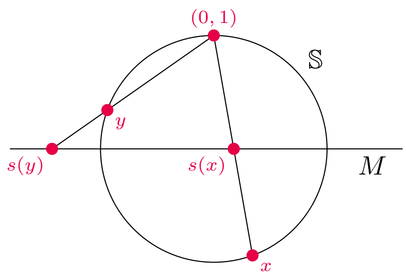
Zadanie 1. Weźmy zbiór $C = \{0, 1\}$ z topologią dyskretną. Sprawdzić, że przestrzeń X jest niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niestała funkcja ciągła $f\colon X \to C$.

Zadanie 2. Przekonać się, że w definicji dotykania na $\mathbb{R}^2$ użycie dowolnego ze wzorów na odległość:
$d_2(p,q) := \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$, $d_1(p,q) := |p_1-q_1|+|p_2-q_2|$,
$d_\infty(p,q) := \max(|p_1-q_1|, |p_2-q_2|)$, prowadzi do tej samej relacji dotykania (choć możliwe, że dla tych samych p i n trzeba inaczej dobrać punkt q).



Rzut stereograficzny z zadania 3

Zadanie 3. Niech $M = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie zbiorem $\mathbb{R}$ wzbogaconym o dodatkowy element oznaczony wymownym symbolem ∞. Przyjmijmy, że ∞ dotyka wszystkich nieograniczonych podzbiorów $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz (wyłącznie) wszystkich zbiorów zawierających ∞. Ponadto każdy z punktów $x \in \mathbb{R}$ dotyka tych zbiorów, które posiadają punkty dowolnie blisko x (podobnie jak dla $\mathbb{R}$). Uzasadnić, że rzut stereograficzny $s\colon \mathbb{S} \to M$ (posyłający punkt $(0,1)$ na punkt ∞) jest homeomorfizmem.

Zadanie 4. Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$. Wykazać istnienie (dokładnie jednej) funkcji ciągłej $\overline{f}\colon X/{\sim} \to Y$ takiej, że $f(x) = \overline{f}([x])$ dla wszystkich $x \in X$.

Zadanie 5. Wykazać, że pojedynczy aksjomat

$$\textbf{(C0)} \quad A \cup \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A \cup B} \setminus \overline{\emptyset}$$

jest równoważny zestawowi aksjomatów (C 1,2,3,4′) (jak również (C 1,2,3,4)).

Szkice rozwiązań zadań zamieszczamy na str. 15.

O książce *Matematyka z różnych stron widziana*

*Paweł STRZELECKI**

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Dawno nie miałem w ręku książki, której tytuł tak dobrze oddawałby jej zawartość i charakter. W niezbyt długim tekście trudno oddać jej pełną sprawiedliwość (należy ją po prostu przeczytać i przeżyć, najlepiej stopniowo, nie od razu).

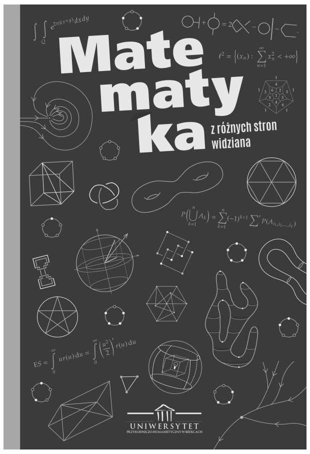
Matematyka z różnych stron widziana jest zbiorem kilkudziesięciu artykułów i esejów, stanowiących w większości zapisy wybranych odczytów wygłaszanych przez ponad 30 lat na Szkołach Matematyki Poglądowej. Szkoły organizowane są przez Ośrodek Kultury Matematycznej założony przez grupę oddanych matematyce entuzjastów skupioną wokół prof. Marka Kordosa. Książka jest więc, po pierwsze, dokumentem niezwykłej wieloletniej działalności związanej z najlepiej pojętym upowszechnianiem nauki. Otóż nauka nie może istnieć bez rozmowy – i to zarówno rozmowy uczonych tej samej specjalności między sobą, jak i z koleżankami i kolegami z odleglejszych rejonów świata nauki, a także z tymi, którzy do nich za chwilę dołączą, z tymi, którzy po prostu zostaną szeregowymi użytkownikami matematyki (lub innej dyscypliny), a wreszcie całą rzeszą rozsądnych ludzi, którzy z licznych względów chcieliby wiedzieć, *co w naukowej trawie piszczy.*

Nie jest wcale rzeczą jasną, jak takie dialogi mają wyglądać i jak je prowadzić. Jak pisze sam Marek Kordos w tekście, który zamyka książkę – prowadząc Czytelnika od Lewisa Carrolla i jego Alicji po hipotezę geometryzacyjną Thurstona i medal Fieldsa Griszy Perelmana – i jest zapisem jego odczytu w Nowym Sączu z okazji pierwszego wręczenia dyplomów absolwentom tamtejszego Kolegium Nauczycielskiego: trudnością, z którą musiał się jako prelegent zmierzyć,

> *… był fakt, że należało mówić o matematyce, a w uroczystości mieli wziąć udział (i wzięli) ludzie o bardzo różnym stopniu oswojenia z tą dyscypliną. Byli wybitni matematycy polscy (w tej liczbie ówczesny Rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego), ale też sądeccy parlamentarzyści i najznakomitsi przedstawiciele nowosądeckiego Ratusza (z Prezydentem Miasta na czele), sądecka Hierarchia Kościelna, wykładowcy Kolegium (a więc także muzycy, sportowcy, psychologowie, angliści itd.), nauczyciele szkolni, studenci i liczna gawiedź (bo rzecz odbywała się w bardzo pojemnej ratuszowej auli, tej z przepięknym piecem kaflowym). Jak powiedzieć coś, czego bez znudzenia mogliby wysłuchać oni wszyscy?*

Książka w istocie jest świadectwem wielowątkowej, wielowymiarowej, zespołowo udzielonej i, co ważne, spójnej odpowiedzi na ostatnie pytanie. Jak pisze jeden z autorów, Zbigniew Marciniak:

> *Matematyka jest dla mnie częścią przyrody. Podobnie jak ludzie zajmujący się innymi dyscyplinami nauki, matematyk stara się odkryć prawa opisujące ten fragment rzeczywistości. Matematyka posiada przy tym szczególny urok: odkrywcy dana jest od razu „cała” prawda. Twierdzenie, poprawnie udowodnione dwa tysiące lat temu, pozostaje do dziś tak samo prawdziwe.*



To prawda, niemniej ludzie dzielą się swoim widzeniem matematyki. To konieczne, stąd między innymi bierze się postęp w nauce, zdolność abstrahowania, formułowania problemów i ich rozwiązywania. Każde twierdzenie *poprawnie udowodnione*, później zaś dogłębnie zrozumiane i przetrawione, można w badaniach stosować rozmaicie i w różnych kontekstach; aby tego doświadczyć, potrzebna jest między innymi rozmowa. Obszerność matematyki wiąże się wszak z trudnością wyboru własnej drogi naukowej lub (gdy się ją już raz wybierze) podjęcia decyzji o jej zmianie; zwięzły imperatyw Hilberta – mówiący, że motorem rozwoju nauk matematycznych jest rozwiązywanie problemów – może nie wystarczyć. Ta książka go wspomaga i dostarcza inspiracji do przemyśleń i poszukiwań.

Teksty składające się na książkę dzielą się na kilka grup, a może raczej dałoby się je oznaczyć różnymi etykietkami (zwykle wybór etykietki nie jest ani w pełni oczywisty, ani jednoznaczny). Mnie podczas lektury i notatek pojawiła się piątka takich roboczych etykiet. Oto one, z przykładami tekstów, którym gotów byłbym je przydzielić.

Po pierwsze *klasyka matematyki*. Do tej grupy zaliczam m.in.:

- Cztery teksty Zbigniewa Marciniaka: stosunkowo elementarny i bardzo klasyczny *Wzór Eulera*; drugi – *Skąd to się wzięło?* (tekst o licznych mostach między geometrią i fizyką, który pozwala Czytelnikowi spojrzeć z lotu ptaka na panoramę obejmującą prace Rydberga i Balmera z jednej strony, z drugiej zaś – ideały, algebry funkcji ciągłych i twierdzenie Gelfanda–Najmarka, przyprawiające czasem o ból głowy adeptów analizy funkcjonalnej); trzeci – *Wielkie Twierdzenie Fermata* (przybliżający klarownie, w sposób zrozumiały dla studentów matematyki, kulisy i pojęcia kryjące się za hipotezą Taniyamy–Shimury i słynnym dowodem Wilesa); i wreszcie czwarty – o teorii grup jako przykładzie teorii aksjomatycznej
- Jacka Dębka przekład wizjonerskiego wykładu habilitacyjnego Riemanna
- Tekst Michała Hellera i Zdzisława Pogody o geometrii i kosmologii
- Pawła Traczyka *Kolorowe węzły i sploty* oraz Krzysztofa Ciesielskiego *Topologiczne układy dynamiczne*
- Michała Adamaszka *1, 2, 4, 8* i Tomasza Kochanka *O metodzie probabilistycznej Paula Erdősa*
- Jacka Świątkowskiego *O bryłach i parkietażach platońskich* i Tadeusza Nadziei *Czy możemy usłyszeć wymiar przestrzeni?*

Wspólnym mianownikiem tekstów z etykietą *klasyka* jest dla mnie to, że od najprostszych definicji i przykładów, opowiedzianych bardzo często ze swadą, w sposób genialnie zrozumiały prowadzą Czytelników do osiągnięć nowoczesnej matematyki pokazanych panoramicznie i poglądowo, w sposób, którego nie wstydziliby się autorzy najlepszych tekstów przeglądowych w *Notices of the American Mathematical Society*. Dwa zdania zaczerpnięte z tych tekstów, nie do końca na chybił trafił, mogą służyć za motto przekazu tej warstwy książki: *Matematyka wzięła się ze zmagań z rzeczywistością pozamatematyczną* (Marciniak), *Wszystko wskazuje na to, że przyszłość należy do badań interdyscyplinarnych* (Heller, Pogoda). Nie ma w tekstach istotnie nowych wyników matematycznych, niemniej bez wątpienia mają one wybitnie naukowy charakter.

Druga z moich roboczych etykiet to *na pozór ciekawostki i drobiazgi, ale w istocie nie tylko*. Wiele tekstów, którym byłbym gotów ją przydzielić, dotyczy m.in. matematyki dyskretnej i kombinatoryki (prominentni autorzy w tej klasie to Joanna Jaszuńska i Jarosław Wróblewski), choć nie tylko: znajdzie się tu też matematyka wiązania krawatów i sznurówek (brzmi jak nieszkodliwe dziwactwo, które – jednak! – trafiło m.in. na łamy *Nature*), opowieści o izometriach i liczbach chromatycznych etc. W tej grupie tekstów jeden ze wspólnych mianowników to ilustracja przenikania się bardzo różnych subdyscyplin matematyki, często w zupełnie nieoczekiwany sposób.

Rozwiązanie zadania F 1058.
W momencie rozpoczęcia opuszczania deski ciężarek naciska na nią z siłą $F = m(g-a)$. Od deski oderwie się, gdy wartość siły, z jaką sprężyna ciągnie go w górę, zrówna się z siłą F, to znaczy, gdy wydłużenie x sprężyny osiągnie wartość $x = m(g-a)/k$. Nastąpi to po czasie

$$t_0 = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ak}}.$$

W chwili t_0 ciężarek porusza się z prędkością $v = at_0$ w dół, tzn. w kierunku wzrostu wydłużenia sprężyny, po czym wykonuje drgania względem położenia równowagi $x_0 = mg/k$ z częstością $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$x(t) = x_0 + A\sin\left(\omega\left(t - t_0\right) + \varphi\right).$$

Znamy położenie $x(t_0) = A\sin(\varphi) = x_0$ i prędkość $v(t_0) = A\omega\cos(\varphi) = at_0$. Po podstawieniu obliczonych wcześniej wartości x_0 oraz t_0 i skorzystaniu z tożsamości trygonometrycznej otrzymujemy:

$$A = \frac{m}{k}\sqrt{a(2g-a)}.$$

Rozwiązanie zadania F 1057.
Para nad powierzchnią cieczy zachowuje się jak gaz doskonały. W czasie Δt do jednostki powierzchni cieczy docierają cząsteczki o prędkości $\vec{v}$ wypełniające walec o objętości $S|\vec{v}|\cos(\theta)\Delta t$, przy czym θ oznacza kąt, jaki prędkość $\vec{v}$ tworzy z prostą prostopadłą do elementu powierzchni S. Dla otrzymania liczby ΔN cząsteczek docierających do elementu S powierzchni należy to wyrażenie wysumować po wszystkich prędkościach, dla których kąt θ odpowiada ruchowi w kierunku powierzchni – dla gazu (pary) o gęstości n cząsteczek w jednostce objętości otrzymujemy wyrażenie:

$$\Delta N = \beta n v_{sr} S \Delta t,$$

gdzie wartość parametru β wynika z postaci rozkładu prędkości cząsteczek gazu (rozkładu Maxwella), a v_{sr} jest pierwiastkiem ze średniego kwadratu prędkości. Z zasady ekwipartycji energii otrzymujemy związek $mv_{sr}^2 = 3kT$, w którym k oznacza stałą Boltzmanna. Zgodnie z równaniem stanu gazu doskonałego o ciśnieniu p:

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Otrzymujemy:

$$\Delta N = \beta p S \Delta t \sqrt{\frac{3}{mkT}}.$$

Tylko ułamek α tych cząstek „dołącza” do cieczy: $\Delta N_c = \alpha \Delta N$ – reszta odbija się od powierzchni, pozostając cząsteczkami pary. Z drugiej strony, w wyniku ruchów termicznych, część cząsteczek cieczy odrywa się od jej powierzchni i stają się one cząsteczkami pary. W temperaturze T, gdy ciśnienie pary wynosi p_S, tyle samo cząsteczek cieczy przechodzi z pary do cieczy, co z cieczy do pary. Oznacza to, że w temperaturze T w czasie Δt:

$$\Delta N_p = \alpha \beta p_S S \Delta t \sqrt{\frac{3}{mkT}}$$

cząsteczek cieczy staje się cząsteczkami pary. Otrzymujemy więc, że w czasie Δt masa pary wzrasta o:

$$\Delta M_p = \alpha\beta(p_S - p) m S \Delta t \sqrt{\frac{3}{mkT}} = \\ = \alpha\beta(p_S - p) S \Delta t \sqrt{\frac{3m}{kT}}.$$

Dla rozkładu Maxwella prędkości cząsteczek pary $\beta^2 = 1/(6\pi)$ i otrzymujemy tzw. wzór Hertza–Knudsena:

$$\frac{1}{S}\frac{dM_p}{dt} = \alpha(p_S - p)\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}.$$

I. W. Eames, N. J. Marr and H. Sabir, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **40**, 2963 (1997).

Kolejna etykieta to *nieoczekiwane zastosowania i połączenia na wskroś dyscyplin nauki*. Prominentnym autorem w tej grupie tekstów jest znakomity wrocławski probabilista i statystyk, Andrzej Dąbrowski, a za dobry przykład tego, czego dotyczy przekaz takich tekstów, niech posłuży jego zdanie: *Problemy geometrii stochastycznej mają swoje źródła w astronomii, fizyce atomowej, biologii, rozpoznawaniu obrazów, poszukiwaniu złóż geologicznych – wszędzie tam, gdzie oglądamy tylko fragmentaryczny kadr rzeczywistości, jakby kilka klatek pewnego filmu.*

Czwarta etykietka to *historia i filozofia matematyki*; obie te bohaterki występują m.in. w tekstach Marka Kordosa i Romana Murawskiego, napisanych z wielką erudycją. Szczególną uwagę zwraca esej *Powrót do Natury, czyli zwycięstwo pokory nad pychą*, mowa w nim m.in. o zdobywaniu wiedzy przez kumulację doświadczeń i kontekstowe analogie, co w epoce burzliwego rozwoju uczenia maszynowego w różnych odmianach i wszelkich jego zastosowań powinno prowokować każdego do refleksji i własnych poszukiwań.

Ostatnia z moich roboczych etykiet nosi nazwę *społeczna rola matematyki, edukacja i kultura*. Przydzieliłbym ją m.in.:

- Tekstom Małgorzaty Mikołajczyk *Czy można nauczyć pomysłowości?* oraz *Kogo kształcimy?* (mowa w nich m.in. o potrzebie budowania nawyku bycia aktywnym u studentów i uczniów, a także u przyszłych nauczycieli). Oba one świadczą o tym, że dobrze uczona matematyka – widziana jako integralna część kultury i edukacji w ogóle! – znakomicie służy wyrabianiu jakże potrzebnych w każdej działalności życiowej nawyków twórczej aktywności i najszerzej pojętego krytycyzmu, poszukiwania nowych rozwiązań i pomysłów, gotowości do wymiany doświadczeń etc.
- Tekstowi Jana Waszkiewicza i Agnieszki Wojciechowskiej o związku przemian w kulturze z nauczaniem matematyki, stanowiącemu jedną z prób przemyślanych odpowiedzi, dlaczego (i jakiej) matematyki trzeba uczyć w szkole
- Tekstowi Ryszarda Janiszewskiego o inspiracjach matematycznych w architekturze (w którym z osobistą radością matematyka odnalazłem m.in. znamienne nawiązanie do powierzchni minimalnych jako kształtów lekkich pokryć dachowych)
- Dość osobistym esejom Tomasza Nowickiego *Pod prąd* oraz Zofii Miechowicz *Czy Pitagoras była kobietą?*

Za streszczenie tej części przekazu *Matematyki z różnych stron widzianej* niech posłużą zdania Tomasza Nowickiego, dziś matematyka w Thomas Watson IBM Research Center w USA, któremu w swoim czasie przyszło mówić zarówno do studentów, którzy poza matematyką świata nie widzieli, jak i do studentów, którzy – ku swemu przykremu zaskoczeniu – jednak musieli mieć z nią choćby minimalny kontakt:

> *Belfer musi być showmanem, ale show powinien mieć solidną osnowę. Nie można opowiadać przez całe zajęcia anegdotek. [...]*
>
> *Zadaniem matematyki nie jest bowiem dowodzenie twierdzeń, ani poznawanie świata, choć służą temu w innych naukach narzędzia matematyczne. Zadaniem matematyki jest lepiej świat zrozumieć.*

Ostatnie zdanie Nowickiego mogłoby według mnie służyć za motto całej książki.

⋆ ⋆ ⋆

Wspomnę jeszcze dla porządku, że *Matematyka z różnych stron widziana* napisana jest niezwykle starannie i pięknie zilustrowana; korekta, redakcja, skład i łamanie (któż jeszcze dziś wie np., co to jest żywa pagina?) budzą szacunek.

Podsumowując, stwierdzam z głębokim przekonaniem, że książka *Matematyka z różnych stron widziana* ma olbrzymią wartość naukową, kulturową i popularyzatorską. Będzie z pewnością chętnie czytana, a w licznych bibliotekach znajdzie miejsce obok *Co to jest matematyka?*, Couranta i Robbinsa, jako świetna, zespołowa, polska odpowiedź.