

Naiwna próba dowodu hipotezy Fürediego–Hajnalą

Nim podamy poprawny dowód hipotezy 1 przedstawiony przez Marcusa i Tardosa, sami spróbujemy naiwnie zastosować lemat 1. Przez $f_n(\sigma)$ oznaczmy minimalną liczbę jedynek taką, że każda macierz wymiaru $n \times n$, która ma przynajmniej $f_n(\sigma)$ jedynek, zawiera $P(\sigma)$. Mamy nadzieję, że dzięki lematowi 1 uda nam się skonstruować jakieś równanie rekurencyjne na $f_n(\sigma)$. Ustalmy więc liczbę całkowitą l i weźmy macierz A wymiaru $n \times n$ dla n podzielnego przez l , która nie zawiera $P(\sigma)$. Możemy jej wiersze i kolumny podzielić na n/l grup po l wierszy i kolumn, a następnie skonstruować macierz podziału B . Ponieważ B także nie zawiera $P(\sigma)$, to ma co najwyżej $f_{n/l}(\sigma)$ jedynek. Każda jedynka w B odpowiada co najwyżej l^2 jedynkom w A , co daje nam $f_n(\sigma) \leq f_{n/l}(\sigma) \cdot l^2$. Czytelnik zaznajomiony z analizą równań rekurencyjnych dostrzeże, że rozwiązanie takiej rekurencji daje nam $f_n(\sigma) = O(n^2)$, podczas gdy chcemy pokazać $f_n(\sigma) = O(n)$. Wynika stąd, że potrzebujemy jeszcze jakiegoś dodatkowego pomysłu.

Dowód Marcusa i Tardosa

Teraz przedstawimy poprawny dowód hipotezy 1.

Dowód. Ustalmy permutację $\sigma \in S_k$. Weźmy dowolną zero-jedynkową macierz A wymiaru $n \times n$, która nie zawiera $P(\sigma)$. Załóżmy przy tym, że k^2 dzieli n . Oznaczmy też przez S_{ij} podmacierz A składającą się z wierszy od $(i-1)k^2 + 1$ do ik^2 oraz kolumn od $(j-1)k^2 + 1$ do jk^2 . Rozpatrzmy podział wierszy i kolumn macierzy A na n/k^2 grup, każda rozmiaru k^2 . Zauważmy, że macierz tego podziału B wymiaru $n/k^2 \times n/k^2$ spełnia $B[i, j] = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy podmacierz S_{ij} zawiera choć jedną jedynkę. Wiemy już, na mocy lematu 1, że B wyklucza $P(\sigma)$.

Powiemy, że blok S_{ij} jest szeroki (odpowiednio wysoki), kiedy zawiera jedynki w przynajmniej k różnych kolumnach (odpowiednio wierszach). Niech

$C_j = \{S_{ij} : i = 1, 2, \dots, n/k^2\}$. Wykażemy, że liczba bloków w C_j , które są szerokie, to co najwyżej $k \binom{k^2}{k}$. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Z zasady szufladkowej wynika wtedy, że mamy takie k bloków $S_{i_1j}, \dots, S_{i_kj}$, z których wszystkie mają jedynki w pewnych kolumnach $c_1 < \dots < c_k$. Dla każdej jedynki w r -tym wierszu i s -tej kolumnie macierzy $P(\sigma)$ możemy wybrać jedynkę w kolumnie c_s i odpowiednim wierszu z bloku S_{i_rj} , dostając, że A zawiera $P(\sigma)$. To sprzeczność, która pokazuje, że rzeczywiście w C_j jest maksymalnie $k \binom{k^2}{k}$ szerokich bloków.

Oznaczmy także $R_i = \{S_{ij} : j = 1, \dots, n/k^2\}$. Analogicznie możemy pokazać, że R_i zawiera maksymalnie $k \binom{k^2}{k}$ wysokich bloków.

Podsumowując, dostajemy, że w A jest maksymalnie $\frac{n}{k^2} k \binom{k^2}{k}$ bloków szerokich i maksymalnie tyle samo bloków wysokich. Liczbę jedynek w takich blokach szacujemy naiwnie, przez k^4 . Z kolei każdy blok, który nie jest ani wysoki, ani szeroki, ma maksymalnie $(k-1)^2$ jedynek. Stąd wynika oszacowanie:

$$\begin{aligned} f_n(\sigma) &\leq f_{n/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2 \frac{n}{k^2} k \binom{k^2}{k} k^4 = \\ &= f_{n/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2nk^3 \binom{k^2}{k}. \end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla n , które są podzielne przez k^2 . Jeśli jednak k^2 nie dzieli n , to weźmy największe $n' < n$, które jest podzielne przez k^2 . Możemy łatwo oszacować:

$$\begin{aligned} f_n(\sigma) &\leq f_{n'}(\sigma) + 2k^2 n \leq \\ &\leq f_{n'/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2 \left(k^3 \binom{k^2}{k} + k^2 \right) n. \end{aligned}$$

Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelnikowi ostatni szlif, czyli wykazanie, że wraz z warunkiem początkowym $f_1(\sigma) \leq 1$ ta powyższa nierówność daje:

$$f_n(\sigma) \leq 2k^4 \binom{k^2}{k} n. \quad \square$$

Niebo w październiku

Październik jest trzecim kolejnym miesiącem, w którym Słońce kontynuuje szybką wędrówkę na południe. W tym czasie wysokość jego górowania obniży się o ponad 10° , a w ślad za tym jego czas przebywania nad widnokresem zmniejszy się do mniej niż 10 godzin. W niedzielę 30 października nastąpi zmiana czasu na zimowy i należy pamiętać o cofnięciu wskazówek zegarów o godzinę.

Ze Słońcem związane jest jedno z ciekawszych wydarzeń astronomicznych października – jego częściowe zaćmienie przez Księżyc. Wydarzenie nastąpi 25 dnia miesiąca, kiedy to Księżyc przejdzie przez nów i częściowo zasłoni Słońce. Maksymalnie Księżyc zakryje 86% średnicy tarczy słonecznej, ale tak głębokie zaćmienie da się dostrzec tylko ze środkowej Syberii. W Polsce zjawisko zacznie się około 11:10 i skończy niewiele ponad dwie

godziny później, z fazą maksymalną mniej więcej o 12:20. Nad naszym krajem Księżyc zasłoni od nieco ponad 45% średnicy tarczy słonecznej w Bogatyni do ponad 56% w Suwałkach.

Zanim dojdzie do zaćmienia Słońca, na początku października dobrze widoczna jest planeta **Merkury**, która 9 dnia miesiąca osiągnie maksymalną elongację zachodnią. Niestety, jak to u nas bywa, oddali się wtedy od Słońca na niewiele ponad 18° . Mimo to planeta pozostanie ozdobą porannego nieba aż do księżycowego nowiu. W dniu maksymalnej elongacji o godzinie 6 rano Merkury wzniesie się na wysokość 7° , świecąc z jasnością $-0,5^m$ jakieś 12° na godzinie 5 względem Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy Lwa. Przy użyciu teleskopów można próbować dostrzec tarczę planety o średnicy $7''$ i w fazie 54%. Do końca

okresu widoczności Merkury pojaśnieje do $-1,1^m$, jego tarcza zmniejszy się do $5''$, faza zaś urośnie do 95%. 24 października 5° nad Merkurym pokaże się Księżyc w fazie 2%.

Na niebie wieczornym dobrze widoczne są cztery gazowe olbrzymy Układu Słonecznego oraz planetoida (4) Westa. Najbardziej na zachód swoje pętle po niebie kreślą **Saturn** i **Westa**, wędrujące na tle gwiazdozbioru Koziorożca. W związku z tym zachodzą one najwcześniej z opisywanych ciał krążących wokół Słońca. Saturn 23 października zmieni kierunek ruchu na prosty, to samo na początku miesiąca uczyni Westa. W obu przypadkach oznacza to koniec ich najkorzystniejszego okresu obserwacyjnego w tym roku. Saturn zatrzyma się około $37'$ od gwiazdy 4. wielkości ι Cap. Westa natomiast zakresli łuk o długości prawie 3° około 9° na południowy wschód od Saturna i pod koniec miesiąca przejdzie do sąsiedniego gwiazdozbioru Wodnika. W październiku jasność Saturna spadnie do $+0,6^m$, a jego tarcza skurczy się do $17''$. Jasność Westy zmniejszy się w tym czasie do poniżej $+7^m$. Saturn góruje po godzinie 19, wznosząc się na wysokość ponad 20° . Westa przecina południk lokalny kilkadziesiąt minut później i 5° niżej.

Przez większą część nocy październikowych można obserwować planety **Jowisz** i **Neptun** tuż po opozycji. Największa planeta Układu Słonecznego w październiku przebywa na pograniczu gwiazdozbiorów Ryb i Wieloryba. Góruje po godzinie 22 na wysokości przekraczającej 35° . Do końca miesiąca jasność planety zmniejszy się do $-2,8^m$, jej tarcza zaś zmniejszy średnicę do $50''$. Planeta Neptun kreśli swoją pętlę $\sim 8^\circ$ na południowy zachód od Jowisza. Najwyższe położenie nad horyzontem zajmuje pół godziny wcześniej. Neptun świeci z jasnością $+7,8^m$ i jest widoczny z pomocą lornetek i teleskopów.

Ostatni z gazowych olbrzymów, planeta **Uran**, przebywa na tle gwiazdozbioru Barana, we wschodniej części konstelacji. Uran jest jeszcze przed opozycją, a zatem pojawia się na niebie po zachodzie Słońca, ale można go obserwować przez całą najciemniejszą część nocy. Najlepiej tę planetę obserwować około godziny 1, gdy wznosi się na wysokość ponad 55° ponad południową część nieboskłonu. Blask Urana wynosi $+5,7^m$, stąd na ciemnym niebie można próbować dostrzec go gołym okiem. Jednak lepiej do tego celu użyć przynajmniej lornetkę. Do odszukania planety warto wykorzystać gwiazdy ζ i δ Arietis. Uran znajduje się na łączącej je linii, mniej więcej 4° od drugiej i jaśniejszej z wymienionych gwiazd.

Dobrze widoczną planetą jest szykujący się do grudniowej opozycji **Mars**. Planeta przemierzy kolejne ponad 5° na tle gwiazdozbioru Byka i pod koniec miesiąca przetnie linię łączącą gwiazdy El Nath (β Tau) i ζ Tau, czyli gwiazdy stanowiące rogi Byka. W tym samym czasie zmieni również kierunek ruchu na wsteczny, rozpoczynając dwumiesięczny okres najlepszej widoczności około opozycji. Czerwona Planeta góruje

przed godziną 4 na wysokości przekraczającej 60° . W październiku Mars zwiększy średnicę kątową do $15''$ i jasność do $-1,2^m$.

Księżyc przejdzie przez I kwadrę 2 października w gwiazdozbiorze Strzelca, mijając najbardziej na południe wysuniętą część swojej orbity i w kolejnych dniach zacznie wznosić się wyżej. Trzy dni później w fazie zwiększonej do 80% Srebrny Glob przejdzie 5° na południe od Saturna, by 8 października, na dobę przed pełnią, przejść 3° na południe od Jowisza.

W dniach 12–15 października Srebrny Glob odwiedzi gwiazdozbiór Byka, zmniejszając stopniowo fazę od 90% do 76%. Pierwszego z wymienionych dni Księżyc zbliży się na 5° do Plejad, drugiego przejdzie 7° na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka, trzeciego natomiast przetnie linię łączącą Marsa i El Nath.

Naturalny satelita Ziemi osiągnie ostatnią kwadrę 17 października w gwiazdozbiorze Bliźniąt, tworząc trójkąt równoramienny z Kastorem i Polluksem, dwiema najjaśniejszymi gwiazdami konstelacji. Do obu gwiazd zabraknie Księżycowi po około 6° .

Podobnie jak we wrześniu, po ostatniej kwadrze zacznie się najciekawszy okres widoczności Księżyca, który zbliżając się do nowiu, stopniowo zmniejszy fazę, coraz bardziej uwidaczniając tzw. światło popielate. W jesienne poranki ekliptyka tworzy duży kąt z widnokregiem, stąd Księżyc pozostanie dobrze widoczny prawie do samego nowiu.

Tarcza Srebrnego Globu 19 października zmniejszy fazę do 37% i pokaże się 5° od gromady otwartej gwiazd M44 w Raku. Kolejne trzy poranki Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Lwa, zwiężając sierp od 27% do 12%. I tak 20 października Księżyc zbliży się na 7° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji, a dobę później zakryje gwiazdę 5. wielkości 46 Leonis. Gwiazda pojawi się przy ciemnym brzegu księżycowej tarczy około godziny 2:35, kilka do kilkunastu minut po wschodzie obu ciał niebieskich.

W dniach 22–24 października Księżyc wejdzie już niewiele przed Słońcem, prezentując tarczę w fazie, odpowiednio, 11, 5 i 2%. Pomimo to o świcie zdąży się wzniesić na wysokość 28, 17 i 6° , nadal ciesząc oczy obserwatorów. Księżyc pokaże się 24 października 9° od Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy Lwa, a dwa dni później czeka go wspomniane już spotkanie z Merkurym.

Październik jest miesiącem z kilkoma znanymi rojami meteorów. Na początku miesiąca promieniują Drakonidy, z maksimum aktywności 9 października, oraz Taurydy Południowe. Niestety bliski pełni Księżyc popsuje obserwacje obu rojów. Maksimum aktywności Orionidy osiągną 21 października. Radiant tego roju znajduje się około 4° na zachód od Alheny w Bliźniętach i pojawia się na nieboskłonie przed godziną 22. Tej nocy Księżyc wejdzie dopiero przed godziną 4 i przy fazie 12% nie przeszkodzi zbyt w ich obserwacjach.

Ariel MAJCHER