Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2022

Zadania z matematyki nr 847, 848

Redaguje Marcin E. KUCZMA

847. Dana jest funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o następującej własności: dla każdej pary liczb a, b, gdzie $a < b$, istnieją liczby u, v takie, że $a \leqslant u < v \leqslant b$ oraz $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$ dla $x \in [a, b]$. Udowodnić, że funkcja f jest niemalejąca.

848. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n \geqslant 3$. Niech X będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych $(x_1, x_2, \ldots)$ o wyrazach $x_i \in \{1, \ldots, n\}$ i niech B będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych $(b_1, b_2, \ldots)$ o wyrazach $b_i \in \{0, 1\}$. Wyjaśnić, czy istnieje różnowartościowe odwzorowanie zbioru X na cały zbiór B takie, że (dla każdej liczby naturalnej k): jeżeli dwa ciągi (x_i), (y_i) ze zbioru X pokrywają się na odcinku początkowym długości k (tzn. $x_i = y_i$ dla $i \leqslant k$), to ich obrazy także pokrywają się na odcinku początkowym długości k.

Zadanie 848 zaproponował pan Adam Woryna z Rudy Śląskiej.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2022

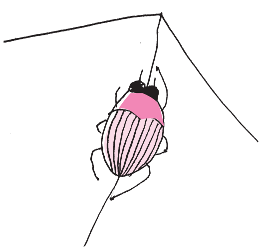
Przypominamy treść zadań:

843. Po krawędziach wypukłego wielościanu pełza żuk. W każdym wierzchołku wielościanu schodzą się trzy krawędzie. Po dojściu do wierzchołka żuk nie zawraca w krawędź, którą przyszedł, lecz wybiera jedną z pozostałych dwóch krawędzi – lewą lub prawą (orientacja: lewo/prawo – tak, jak widać, patrząc z zewnątrz wielościanu). Gdy na jednym rozdrożu żuk wybrał wariant lewy, na następnym wybiera prawy – i na odwrót. Dowieść, że w pewnym momencie żuk wróci do punktu, z którego rozpoczął wędrówkę.

844. Wyjaśnić, czy istnieje liczba pierwsza p, dla której suma

$$1^p + 3^p + \ldots + (2p-1)^p$$

jest sześcianem liczby naturalej.



843. Żuk startuje z wierzchołka O. Niech A, B, C $(A \neq O)$ będzie dowolną trójką kolejno przebytych wierzchołków. Z krawędzi AB żuk wszedł w krawędź BC; wiadomo więc, czy skręcił w lewo, czy w prawo. Zgodnie z przyjętymi regułami daje to informację, czy chwilę wcześniej, w punkcie A, skręcił w prawo, czy w lewo. Określa to jednoznacznie wierzchołek (na jego trasie) poprzedzający A. To znaczy, że taka trójka wierzchołków A, B, C wyznacza trajektorię w przód i w tył. Jest skończenie wiele takich trójek, więc muszą się one powtarzać. Fragment trajektorii między dwoma kolejnymi powtórzeniami pewnej trójki A, B, C zawiera zatem wszystkie wierzchołki początkowego fragmentu wędrówki (do pierwszego wystąpienia A) – w tym wierzchołek O.

844. Odpowiedź: nie istnieje. *Dowód:* oznaczmy rozważaną sumę przez S_p:

$$S_p = \sum_{k=1}^{p} (2k-1)^p = \sum_{k=1}^{p} (2p+1-2k)^p.$$

$S_2 = 10$ nie jest sześcianem. Dalej przyjmujemy, że p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Przekształcamy $2S_p$ modulo p^3:

$$2S_p = \sum_{k=1}^{p} \Big((2k-1)^p + (2p+1-2k)^p \Big) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{p} \left((2k-1)^p - \binom{p}{2} (2p)^2 (2k-1)^{p-2} + \binom{p}{1} (2p)(2k-1)^{p-1} - \binom{p}{0} (2k-1)^p \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \Big(-p(p-1) \cdot 2p^2 (2k-1)^{p-2} + p \cdot 2p(2k-1)^{p-1} \Big).$$

Dzielimy przez 2 (wolno, wobec nieparzystości p) i otrzymujemy

$$S_p \equiv p^3 \cdot A_p + p^2 \cdot B_p \pmod{p^3}$$

dla liczb całkowitych

$$A_p = (1-p) \sum_{k=1}^{p} (2k-1)^{p-2}, \qquad B_p = \sum_{k=1}^{p} (2k-1)^{p-1}.$$

Na mocy małego twierdzenia Fermata $(2k-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, gdy $k \neq (p+1)/2$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Stąd $B_p \equiv p-1 \pmod{p}$, co pozwala przepisać uzyskane przedstawienie S_p jako

$$S_p \equiv p^3 A_p + p^2 (p-1) \pmod{p^3}.$$

Suma S_p dzieli się więc przez p, ale nie przez p^3. Wobec tego nie jest sześcianem żadnej liczby całkowitej.

Uwaga. Witold Bednarek, autor zadania (i podanego rozwiązania), zauważa, że S_p nie jest potęgą żadnej liczby naturalnej o wykładniku naturalnym większym od 2 (to samo rozumowanie) i stawia pytanie, czy S_p jest (dla jakiejkolwiek liczby pierwszej p) kwadratem liczby naturalnej.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 837 ($WT = 2{,}15$) i 838 ($WT = 2{,}24$) z numeru 3/2022

Marek Spychała	Warszawa	46,76
Kacper Morawski	Warszawa	43,56
Michał Adamaszek	Kopenhaga	41,76
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Paweł Najman	Kraków	38,88
Jerzy Cisło	Wrocław	37,05
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Stanisław Bednarek	Łódź	35,50
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,92
Radosław Kujawa	Wrocław	33,74

Pan Marek Spychała – już po raz czwarty.

Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2022

Zadania z fizyki nr 744, 745

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

744. Z północnego bieguna Ziemi chcemy wystrzelić pocisk balistyczny (poruszający się pod wpływem siły ciężkości), który trafi w punkt na równiku, nadając mu najmniejszą możliwą prędkość początkową. Znaleźć wartość tej prędkości oraz kąt, pod którym należy oddać wystrzał. Opory ruchu zaniedbujemy, przyjmujemy, że Ziemia jest jednorodną kulą o promieniu R.

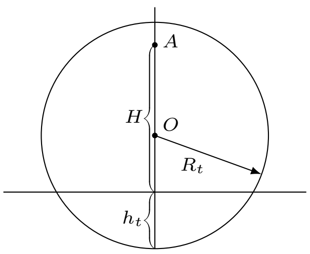
745. Długi cienki pręt porusza się ze stałą prędkością wzdłuż swojej osi. Obserwator znajduje się w dużej odległości od osi. W chwili, gdy promień skierowany na środek pręta utworzył kąt α z kierunkiem jego ruchu, widziana długość pręta okazała się równa jego długości spoczynkowej. Znaleźć prędkość pręta.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2022

Przypominamy treść zadań:

740. Gdy pocisk wystrzelony pionowo do góry rozrywa się w najwyższym punkcie toru, to rozpada się na bardzo dużo odłamków lecących równomiernie we wszystkie strony z prędkością początkową v_0. Taki sam pocisk lecący pionowo w dół rozrywa się na wysokości H nad ziemią i w chwili rozerwania ma prędkość u. Kiedy odłamki będą padać na ziemię z największą częstością?

741. Na nieruchome, płaskie zwierciadło o masie m pada prostopadle do jego powierzchni płaska fala świetlna o energii W_0. Znaleźć prędkość końcową zwierciadła i energię odbitej od niego fali. Rozważyć przypadki graniczne, gdy energia fali padającej jest dużo większa oraz dużo mniejsza od energii spoczynkowej zwierciadła.



740. Po rozerwaniu w chwili $t=0$ środek masy układu opada w dół z przyspieszeniem g i prędkością początkową u, a w układzie środka masy odłamki znajdują się na sferze rozszerzającej się z prędkością v_0.

Rozważmy przedział czasowy $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, gdzie t_1 jest czasem spadania na ziemię pierwszego odłamka, a t_2 to czas, po którym spada odłamek ostatni. W chwili t promień sfery wynosi $R_t = v_0 t$, a droga, jaką przebył środek sfery, $|AO| = ut + gt^2/2$ (zobacz rysunek). Na ziemi leżą odłamki, które byłyby rozłożone na powierzchni wycinka sfery o wysokości

$$h_t = R_t - (H - |AO|) = v_0 t - H + ut + gt^2/2.$$

Ich masa to

$$m(t) = 2\pi R_t h_t m_0/(4\pi {R_t}^2) = $$
$$= m_0[(u+v_0)/2v_0 + gt/4v_0 - H/2v_0 t],$$

gdzie m_0 jest masą wszystkich odłamków (masą pocisku).

Szukana częstość padania odłamków jest pochodną funkcji $m(t)$:

$$dm/dt = m_0 g/4v_0 + m_0 H/2v_0 t^2.$$

Wartość tej pochodnej jest największa, gdy $t=t_1$. Odłamek, który pierwszy spada na ziemię, ma w punkcie A prędkość $u+v_0$, zatem $H = (u+v_0)t_1 + g{t_1}^2/2$. Stąd szukany czas

$$t_1 = \left[\sqrt{2gH + (u+v_0)^2} - (u+v_0)\right]/g.$$

741. Oznaczając przez W_1 energię fali odbitej od zwierciadła, a przez v prędkość uzyskaną przez zwierciadło, możemy zapisać zasadę zachowania energii:

$$W_0 + mc^2 = W_1 + mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

oraz zasadę zachowania pędu:

$$W_0/c = -W_1/c + mv/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy:

$$(1)\quad v = c\left[(1 + 2W_0/mc^2)^2 - 1\right]/\left[(1+2W_0/mc^2)^2 + 1\right],$$

$$(2)\qquad W_1 = W_0/(1 + 2W_0/mc^2).$$

Z równania (2) widać, że energia fali odbitej nie może przekroczyć połowy energii spoczynkowej zwierciadła, niezależnie od energii fali padającej: $W_1 < mc^2/2$. Zatem im większa jest energia fali padającej, tym większa część tej energii jest przekazana zwierciadłu. Gdy $W_0 \gg mc^2$, praktycznie całą energię fali przejmuje zwierciadło.

W przypadku nierelatywistycznym, gdy $W_0 \ll mc^2$, równania (1) i (2) możemy uprościć:

$$v/c \approx 2W_0/mc^2, W_1 \approx W_0(1 - 2W_0/mc^2).$$

Zatem w tym przypadku fala prawie w całości zostaje odbita od zwierciadła, przekazując tylko nieznaczną część swojej energii. Zwierciadło można efektywnie rozpędzić tylko wtedy, gdy energia fali padającej jest porównywalna z jego energią spoczynkową.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.