Czy inni mają więcej rodzeństwa?

*Wojciech CZERWIŃSKI**

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Chyba już od szkoły podstawowej miałem wrażenie, że ludzie, których znam, mają więcej rodzeństwa niż średnia. Tłumaczyłem to sobie zawsze tym, że widocznie moi znajomi z różnych przyczyn pochodzą ze środowisk, w których ludzie mają tendencję do posiadania większej liczby dzieci. Trwałem w tym błędnym myśleniu do całkiem niedawna, aż odkryłem, że przyczyną tego złudzenia jest pewien dość prosty matematyczny mechanizm.

Ale zacznijmy od początku. Załóżmy dla uproszczenia, że w społeczeństwie, w którym żyjemy, średnia dzietność wynosi 2, czyli panuje dokładna zastępowalność pokoleń. W aktualnej chwili w Polsce dzietność wynosi mniej, bo około 1,38, ale przez okres mniej więcej od roku 1965 do 1995 współczynnik ten wynosił około 2, więc zapewne wielu Czytelników może potraktować to założenie jako naturalne. Czy takie założenie oznacza, że średnia liczba rodzeństwa wynosi 1?

Na pierwszy rzut oka tak może się wydawać – i faktycznie tak ma się sprawa, jeśli każdy człowiek ma dokładnie dwójkę dzieci. Łatwo jednak zauważyć, że nie zawsze tak jest. Przypuśćmy, że 80% par w ogóle nie ma dzieci, natomiast 20% ma dziesięcioro dzieci. Wówczas współczynnik dzietności wciąż wynosi 2, ale każde z dzieci ma dziewięcioro rodzeństwa. A więc średnia liczba rodzeństwa może być dowolnie większa niż 1. Czy może jednak wynosić mniej niż 1?

Pokażemy, że nie jest to możliwe. Intuicyjnie rzecz biorąc, przyczyna jest następująca: licząc rodzeństwo dzieci, więcej razy policzymy te rodziny, w których jest więcej dzieci. Przypuśćmy, że w rozważanym społeczeństwie jest n par, które mają odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dzieci. Z założenia, że średnia dzietność wynosi 2, wiemy, że $k_1 + \ldots + k_n = 2n$. Ile wynosi średnia liczba rodzeństwa? Każde z k_1 dzieci pierwszej pary ma $k_1 - 1$ rodzeństwa, każde z k_2 dzieci drugiej pary ma $k_2 - 1$ rodzeństwa itd. A więc suma liczby rodzeństwa po wszystkich dzieciach to

$$k_1(k_1-1)+\ldots+k_n(k_n-1) = k_1^2+\ldots+k_n^2-(k_1+\ldots+k_n) = k_1^2+\ldots+k_n^2-2n,$$

a co za tym idzie, średnia liczba rodzeństwa to

$$\frac{k_1^2+\ldots+k_n^2}{2n} - 1.$$

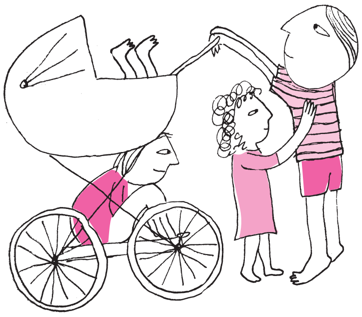
Z nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną dla liczb $k_1, \ldots, k_n$ wynika, że

$$\sqrt{\frac{k_1^2+\ldots+k_n^2}{n}} \geqslant \frac{k_1+\ldots+k_n}{n} = 2.$$

A zatem $\frac{k_1^2+\ldots+k_n^2}{n} \geqslant 4$, czyli $\frac{k_1^2+\ldots+k_n^2}{2n} - 1 \geqslant 1$, co kończy nasze rozumowanie i pokazuje, że faktycznie średnia liczba rodzeństwa zawsze wynosi co najmniej 1, o ile średnia dzietność wynosi 2. Można łatwo powtórzyć to rozumowanie zupełnie analogicznie dla dowolnej dzietności c i wykazać, że średnia liczba rodzeństwa jest nie mniejsza niż $c - 1$.

Naturalne wydaje się w tym kontekście pytanie: jak duży jest ten efekt w rzeczywistości? Trudno jest znaleźć w Internecie precyzyjne informacje na temat aktualnej wielkości rodzin w Polsce (zresztą wymagałoby to skomplikowania naszego modelu, wprowadzenia rodzeństwa przyrodniego itd.). W związku z tym dla celów poglądowych na podstawie różnych danych stworzyłem przykładowy profil dzietności kobiet w pewnym społeczeństwie, która z pewną dokładnością przypomina Polskę w latach 90. Dopasowałem liczby tak, by średnia dzietność była dość okrągła i wynosiła 1,8. W następującej tabelce pokazane jest, ile procent kobiet ma ile dzieci w tym społeczeństwie.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
14,3%	33,8%	27,6%	13,9%	5,9%	2,5%	1,2%	0,5%	0,2%	0,1%



Dla $i \in \{0, \ldots, 9\}$ niech p_i to odsetek kobiet, które posiadają dokładnie i dzieci. Niech N to liczba kobiet w społeczeństwie. Wówczas $N \cdot p_i$ kobiet ma dokładnie i dzieci, a więc dzieci w takich rodzinach jest $N \cdot p_i \cdot i$. Wszystkich dzieci jest $\sum_{i=0}^{9} N \cdot p_i \cdot i$, co jest równe dokładnie $N \cdot 1{,}8$, bo, jak wiemy, dzietność wynosi 1,8. A zatem odsetek dzieci, które żyją w rodzinach o i dzieciach, to $\frac{N \cdot p_i \cdot i}{N \cdot 1{,}8} = 1/1{,}8 \cdot p_i \cdot i$. Poniższa tabelka pokazuje, ile procent dzieci żyje w rodzinach danej wielkości w rozważanym społeczeństwie.

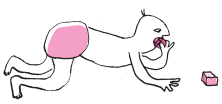
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0%	18,8%	30,7%	23,2%	13,1%	6,9%	4%	1,9%	0,9%	0,5%

W takim społeczeństwie średnia liczba rodzeństwa to

$$\sum_{i=0}^{9}(1/1{,}8 \cdot p_i \cdot i)\cdot(i-1) = 18{,}8\% \cdot 0 + 30{,}7\% \cdot 1 + 23{,}2\% \cdot 2 + \\ + 13{,}1\% \cdot 3 + 6{,}9\% \cdot 4 + 4\% \cdot 5 + \\ + 1{,}9\% \cdot 6 + 0{,}9\% \cdot 7 + 0{,}5\% \cdot 8 = \\ = 1{,}86.$$

Czyli średnia liczba rodzeństwa z naiwnie spodziewanej 0,8 podniosła się do aż 1,86. To naprawdę spory efekt!

Podobny fenomen powinien zachodzić również dla ciotecznego rodzeństwa i dla dalszego kuzynostwa i wydaje się, że powinien być nawet większy niż w przypadku rodzeństwa. Gdyby każda para posiadała dokładnie dwójkę dzieci, to każdy człowiek posiadałby dokładnie czwórkę rodzeństwa ciotecznego oraz szesnaścioro kuzynostwa drugiego rzędu. Zachęcam Ambitnych Czytelników do sprawdzenia, czy w istocie przy takim założeniu średnia liczba rodzeństwa ciotecznego jest większa niż cztery. Codzienne doświadczenie podpowiada, że powinno to raczej być prawdą, zarówno dla rodzeństwa ciotecznego, jak i dla kuzynostwa dowolnie dalekiego rzędu. Kto wie, może jest to nawet temat na ciekawe badania z dziedziny nierówności bądź ze statystyki.

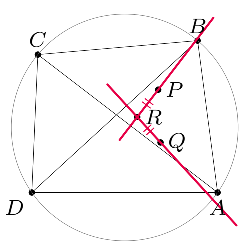


Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1723. Niech $\psi(n)$ oznacza liczbę dzielników pierwszych liczby całkowitej dodatniej n (np. $\psi(10) = \psi(12) = 2$). Rozważmy zbiór A wszystkich par liczb całkowitych dodatnich (a, b) takich, że $a \neq b$ oraz $\psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b)$. Rozstrzygnąć, czy zbiór A jest skończony.
Rozwiązanie na str. 10

M 1724. Prostokąt R o bokach nieparzystej długości jest podzielony na pewną liczbę prostokątów o bokach całkowitej długości i równoległych do boków R. Udowodnić, że istnieje prostokąt wewnątrz prostokąta R, dla którego odległości od boków R są albo wszystkie parzyste, albo nieparzyste.
Rozwiązanie na str. 10



M 1725. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg punkty P i Q są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD, odpowiednio. Prosta przechodząca przez P i prostopadła do prostej AC przecina prostą prostopadłą do BD przechodzącą przez Q w punkcie R. Pokazać, że trójkąt PQR jest równoramienny.
Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1057. W stanie równowagi termodynamicznej, w temperaturze T, ciśnienie pary nad powierzchnią cieczy wynosi $p_S(T)$. Jak szybkość parowania, tj. wzrost ΔM masy pary nad elementem S powierzchni cieczy w czasie Δt, zależy od temperatury T i ciśnienia p pary znajdującej się nad powierzchnią cieczy? Dla uproszczenia modelu zakładamy, że cząsteczka pary uderzająca w powierzchnię cieczy przylega do niej (tzn. staje się cząsteczką cieczy) z prawdopodobieństwem α. Masa cząsteczki równa jest m.
Rozwiązanie na str. 5

F 1058. Ciężarek o masie m przymocowany jest do pionowej sprężyny o stałej sprężystości k. Początkowo sprężyna nie jest ani rozciągnięta ani ściśnięta, a ciężarek spoczywa na poziomej desce. W pewnej chwili deska zaczyna poruszać się w dół ze stałym przyspieszeniem a, co do wartości mniejszym od przyspieszenia ziemskiego g. Jaka będzie amplituda A drgań ciężarka po całkowitym usunięciu deski?
Rozwiązanie na str. 4