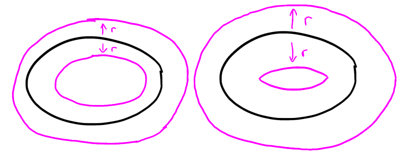
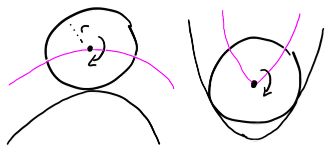
Odpowiedź na drugie pytanie brzmi: na dwoje babka wróżyła. Polecam Czytelnikowi naszkicować sobie r-otoczki wybranej elipsy dla różnych wartości r. Okazuje się, że dla małych $r > 0$ figura ta przypomina pierścień o gładkim brzegu – studenci matematyki uczą się nawet *twierdzenia o otoczeniu tubularnym*, którego jest to szczególny przypadek. Dla większych r brzeg przestaje być gładki po swojej wewnętrznej stronie – powstają kanty podobne do tych, które nauczono mnie kiedyś rysować (rys. 1). Dobrze wiedzieć, że nie żyłem w błędzie!



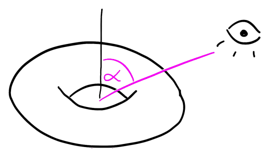
Rys. 1. r-otoczki elipsy dla różnych r

Fenomen powstawania takich kantów jest znany wszystkim amatorom jazdy rowerem. Wyobraźmy sobie, że koło o promieniu r toczymy po podłożu w kształcie elipsy – tor środka koła wyznacza wtedy zarys r-otoczki elipsy. Oczywiście po zewnętrznej stronie elipsy koło jedzie gładko. Gdy jednak toczymy je po stronie wewnętrznej, bywa różnie: odpowiednio duże koło może „zaklinować się” przy końcach długiej osi (punkt styku koła z podłożem robi wówczas skok). Z tego też powodu rowery o mniejszych kołach lepiej się sprawdzają w nierównym terenie.



Rys. 2. Koło rowerowe toczone po nierównym terenie

Czytelnik znający pojęcie *krzywizny* (o której można przeczytać u Jerzego Konarskiego w Δ^4_{19}) zapewne rozpozna, że to krzywizna elipsy decyduje o klinowaniu się lub nie. Konkretnie: że r-otoczka jest gładka dokładnie wtedy, gdy krzywizna jest wszędzie mniejsza od $1/r$. W połączeniu z informacją, że elipsa o półosiach a, b ma krzywiznę pomiędzy a/b^2 i b/a^2 (zależnie od punktu, w którym mierzymy), pomaga nam to rozstrzygnąć, kiedy obserwowany przez nas obwarzanek wydaje się mieć kanty. Otóż jeśli kierunek obserwacji jest odchylony od osi torusa o kąt α (jak na rys. 3), to elipsa o' ma półosie R i $R\cos\alpha$, a maksimum jej krzywizny wynosi $\frac{1}{R\cos^2\alpha}$. Krytyczny kąt α – powyżej którego tracimy gładkość – spełnia więc równość $\cos^2\alpha = \frac{r}{R}$.



Rys. 3. Oznaczenie kąta obserwacji

Zadania

1. Wykazać, że jeśli patrzymy na torus pod kątem α, to dziurę widzimy dokładnie wtedy, gdy $\cos\alpha < \frac{r}{R}$.
2. Jaki kształt ma torus widziany z boku (czyli z kąta $\alpha = 90^\circ$)?
3. Nasz rysunek torusa różni się nieznacznie od otrzymanej otoczki elipsy, a mianowicie „uśmiech” wystaje nieco poza „czapeczkę”. Jakie jest matematyczne uzasadnienie wystającej części uśmiechu?
4. Wykazać, że zewnętrzny zarys torusa – tj. kształt, od którego zaczynamy rysunek – tak naprawdę nigdy nie jest elipsą, z oczywistym wyjątkiem obserwacji pod kątem $\alpha = 0^\circ$.
5. W przypadku $r > R$ powstaje „torus” $\mathcal{T}$ z zaklejoną dziurką, więc jego dowolny rzut jest gładki. Czy oznacza to, że sama bryła $\mathcal{T}$ ma gładką powierzchnię?

Rozwiązania na str. 6.

Wuja słuchać będziesz!

*Wojciech CZERWIŃSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Przeczytałem jakiś czas temu w znakomitej książce Jareda Diamonda *The World Until Yesterday*, że w pewnej kulturze tradycyjnej małym chłopcem opiekuje się raczej wuj (brat matki) niż ojciec. Uzasadnieniem tego zwyczaju ma być fakt, że ojciec nigdy nie jest pewny, natomiast wuj jako krewny ze strony matki z pewnością dzieli z chłopcem wspólne geny. Z pewnością zgodziłby się z taką tezą Sienkiewiczowski Onufry Zagłoba, tłumaczył przecież Rochowi Kowalskiemu, że „gdzie ojca nie ma, tam, pismo mówi, wuja słuchać będziesz...”. Mimo wszystko trudno nie zapytać – czy taki zwyczaj faktycznie ma jakiś sens? A może lepiej – kiedy taki zwyczaj można uzasadnić z genetycznego punktu widzenia?

Wydaje się ewolucyjnie korzystne, żeby chłopcem opiekował się mężczyzna, który dzieli z nim możliwie najwięcej genów. Taki mężczyzna jest najbardziej podobny do chłopca, więc może mu przekazać schematy zachowania najbardziej adekwatne dla danego zestawu cech. Ale, co pewnie o wiele ważniejsze, taki mężczyzna wyczuwa, że jest z chłopcem spokrewniony (patrz uwaga na marginesie). A zatem można się spodziewać, że wyczuwając to pokrewieństwo, w wielu przypadkach będzie okazywał chłopcu więcej uwagi, co będzie oczywiście korzystne. Można więc zapytać: w jakich sytuacjach należy zakładać, że raczej wuj jest bliżej spokrewniony z chłopcem niż ojciec? Łatwo zauważyć, że takie założenie ma sens jedynie, jeśli naprawdę wiele dzieci nie jest genetycznymi dziećmi swoich domniemanych ojców. Trochę dla intelektualnej rozrywki, a trochę dla próby zrozumienia tej tradycyjnej społeczności spróbujemy wyznaczyć liczbę p taką, że: jeśli mniej niż dla frakcji p dzieci domniemany

Ssaki mają dość dobrze rozwinięte systemy intuicyjnego wyczuwania pokrewieństwa po zapachu. Świetny wykład Roberta Sapolsky'ego ze Stanford University na ten temat można obejrzeć tu: `https://youtu.be/P388gUPSq_I`.

ojciec jest genetycznym ojcem, to wychowywanie chłopca przez wuja można wytłumaczyć mechanizmami ewolucji.

W tym miejscu powinniśmy uściślić nieco terminologię: ojcem będziemy od tej pory nazywać faktycznego genetycznego ojca dziecka, natomiast domniemanym ojcem będziemy nazywać męża matki, czyli człowieka, który może być lub nie być genetycznym ojcem. Zakładamy, że matka zawsze jest pewna, bo urodziła dziecko i dzieci nie są podmieniane po urodzeniu. Zakładamy również dla uproszczenia, że w rozważanej społeczności zawsze istnieje domniemany ojciec, co wydaje się dosyć naturalnym założeniem.

Dla obliczenia, ile średnio procent genów chłopiec ma wspólnych z domniemanym ojcem, a ile z wujem, będziemy stosować następujący model, który jest zresztą bardzo bliski rzeczywistości. Zakładamy, że dziecko otrzymuje dokładnie połowę swoich genów od matki i dokładnie połowę swoich genów od ojca. To, które geny matki i ojca odziedziczy dziecko, jest losowe, czyli pewna losowo wybrana połowa genów matki jest przekazywana dziecku, podobnie dzieje się z genami od ojca. A zatem dziecko dzieli zawsze 50% genów z matką i 50% genów z ojcem. Możemy w pewnym uproszczeniu myśleć, że każdy gen rodzica jest z prawdopodobieństwem 50% przekazywany dziecku i że dla każdego genu jest to losowane niezależnie. Nim zajmiemy się bardziej skomplikowanymi pokrewieństwami, obliczmy najpierw, ile genów dzieli pomiędzy sobą rodzeństwo. Jeśli Ania i Bartek są rodzeństwem, to wśród genów Ani odziedziczonych po matce średnio 50% jest wspólnych z Bartkiem oraz wśród genów Ani odziedziczonych po ojcu średnio również 50% jest wspólnych z Bartkiem. A więc rodzeństwo dzieli średnio 50% swoich genów. Co ciekawe, o ile ze swoimi rodzicami dzielimy zawsze *dokładnie* 50% genów, to z rodzeństwem dzielimy *średnio* 50% genów, ale możemy dzielić mniej (powiedzmy 45%) lub więcej (powiedzmy 55%). A ile genów dzieli między sobą przyrodnie rodzeństwo? Średnio 25%, bo jest to średnio połowa genów pochodzących od wspólnego rodzica, a te od drugiego rodzica są różne.

Licząc pokrewieństwo z domniemanymi ojcem i wujem, przyjrzyjmy się najpierw przypadkom skrajnym. W społeczeństwie, w którym domniemany ojciec to zawsze genetyczny ojciec, chłopiec dzieli zawsze 50% genów z domniemanym ojcem, 50% genów z matką, a więc 25% genów z wujem (skoro matka i wuj są rodzeństwem, to dzielą 50% genów). Z kolei w społeczeństwie, w którym domniemany ojciec nigdy nie jest genetycznym ojcem, chłopiec oczywiście dzieli 0% genów z domniemanym ojcem. W takim społeczeństwie natomiast chłopiec dzieli 12,5% genów z wujem: istotnie, chłopiec dzieli 50% genów ze swoją matką, a ta dzieli 25% genów ze swoim przyrodnim bratem, czyli wujem chłopca (pomijamy tu mało prawdopodobny przypadek, że matka i wuj mają tego samego ojca, który nie jest ich domniemanym ojcem). Widać więc, że w zależności od tego, dla ilu procent dzieci ich domniemany ojciec jest ich genetycznym ojcem, bliżej spokrewniony może być albo domniemany ojciec, albo wuj. Niech $p \in [0,1]$ oznacza frakcję dzieci, dla których domniemany ojciec to ojciec. Chłopiec dzieli więc średnio $p/2$ swoich genów z domniemanym ojcem. Chłopiec dzieli też 50% genów ze swoją matką. Jeśli matka oraz wuj mają wspólnego ojca (co jest prawdą z prawdopodobieństwem p^2), to dzielą 50% genów, natomiast jeśli nie, to jako przyrodnie rodzeństwo dzielą 25% genów. A więc matka dzieli średnio ze swoim domniemanym bratem frakcję $1/4 + p^2/4$ genów, co oznacza, że średnio chłopiec dzieli frakcję $1/2 \cdot (1/4 + p^2/4) = 1/8 + p^2/8$ genów z wujem. A więc żeby wuj był średnio bardziej spokrewniony z chłopcem niż domniemany ojciec, musi zachodzić $1/8 + p^2/8 > p/2$, czyli innymi słowy $p^2 - 4p + 1 > 0$. Równanie $x^2 - 4x + 1 = 0$ rozwiązujemy, obliczając $\Delta = 16 - 4 = 12$, a więc mamy

$$x \in \{(4 + \sqrt{12})/2, (4 - \sqrt{12})/2\} = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}.$$

Ponieważ $p \in [0,1]$, to dostajemy $p < 2 - \sqrt{3} < 0{,}268$, czyli dla co najwyżej 26,8% dzieci ich domniemany ojciec był ich ojcem genetycznym. Czy tak było naprawdę w tej społeczności – trudno powiedzieć, ale to najlepsze wytłumaczenie, jakie zdołałem znaleźć. Matematyka, której użyliśmy, jest stosunkowo prosta, ale, jak widać, i taką czasem warto zastosować dla ciekawych moim zdaniem wniosków na temat świata, w którym żyjemy.

Rozwiązanie zadania F 1055.
W dużej odległości od naładowanej kulki pole elektryczne $\vec{E}$ pochodzące od ładunku q ma wartość:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

ε_0 oznacza przenikalność elektryczną próżni. Pole to spowoduje polaryzację dielektryka drugiej kulki i wyindukowanie w niej momentu dipolowego $\vec{p}$ o wartości proporcjonalnej do wartości pola $\vec{E}$:

$$\vec{p} = \alpha\vec{E}.$$

Energia $\mathcal{E}$ dipola $\vec{p}$ wyindukowanego polem $\vec{E}$ w polu $\vec{E}$ wynosi $\mathcal{E} = -\vec{p}\cdot\vec{E}/2$, czyli

$$\mathcal{E} = -\frac{\alpha}{2}E^2 \propto \frac{1}{r^4}.$$

Poszukiwana siła $\vec{F}$ jest równa gradientowi $\mathcal{E}$: $\vec{F} = -\nabla\mathcal{E} \propto 1/r^5$, a więc k-krotne zwiększenie r spowoduje zmniejszenie siły przyciągania kulek k^5 razy.

Rozwiązanie zadania F 1056.
Po połączeniu kul przez drucik prąd będzie płynął dotąd, aż przepływ ładunku nie doprowadzi do wyrównania potencjałów obu kul. Podczas przepływu prądu całkowity ładunek zgromadzony na obu kulach pozostaje stały. Ładunki zgromadzone początkowo na przewodnikach wynosiły: $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1 U_1$, $Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_2 U_2$. Po ustaniu przepływu prądu potencjały obu kul będą równe. Przyjmijmy, że w stanie końcowym na kuli r_2 zgromadzony jest ładunek Q (ładunek zgromadzony na cienkim drucie jest zaniedbywalnie mały). Mamy:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}.$$

Oznacza to, że

$$Q = \frac{(Q_1 + Q_2)r_2}{r_1 + r_2}.$$

Podczas przepływu prądu w druciku wydzieli się ciepło $\Delta\mathcal{E}$ równe różnicy energii początkowej ładunków i ich energii końcowej:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{Q_1U_1}{2} + \frac{Q_2U_2}{2} - \frac{QU + (Q_1 + Q_2 - Q)U}{2} = 2\pi\varepsilon_0\left(r_1U_1^2 + r_2U_2^2 - \frac{(r_1U_1 + r_2U_2)^2}{r_1 + r_2}\right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $\Delta\mathcal{E} \approx 2{,}8\,\mu\mathrm{J}$.