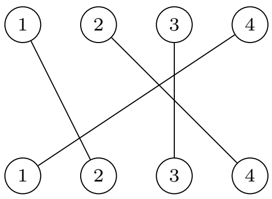
O klasach permutacji

*Wojciech PRZYBYSZEWSKI**

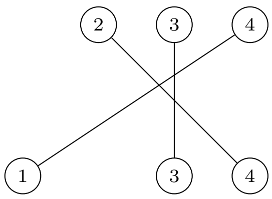
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W tym artykule będziemy rozważali permutacje zbioru n-elementowego, czyli funkcje $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, które są bijekcjami. Dla ustalonego n zbiór wszystkich takich funkcji będziemy oznaczać przez S_n. Daną permutację można reprezentować na różne sposoby, na przykład poprzez wypisanie jej wartości na kolejnych elementach. Permutację $\sigma \in S_4$ taką, że $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 3$ i $\sigma(4) = 1$, możemy zapisać jako 2431. W ten sposób możemy utożsamiać permutacje w S_n z n-elementowymi ciągami o różnych wyrazach ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$, dostając $|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.



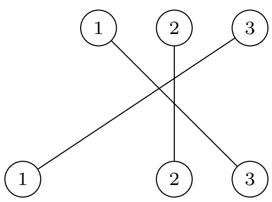
Rys. 1

Inny pomysł polega na narysowaniu dwóch rzędów liczb i połączeniu krawędziami każdej liczby z górnego rzędu z przyporządkowaną jej liczbą z dolnego rzędu. Rysunek 1 przedstawia permutację 2431.



Rys. 2

Taki graficzny sposób prezentowania permutacji ma kilka zalet. Na przykład pozwala łatwo obliczyć złożenie permutacji, tj. dla danych permutacji $\sigma, \tau \in S_n$ obliczyć permutację $\tau \circ \sigma$, która ma tę własność, że $\tau \circ \sigma(k) = \tau(\sigma(k))$. Inną jego zaletą jest możliwość zdefiniowania naturalnej relacji zawierania jednej permutacji przez drugą, w dość podobny sposób do relacji bycia podgrafem. Zastanówmy się, co się stanie, jeśli z rysunku 1 usuniemy jakąś krawędź wraz z jej końcami (na przykład tę między 1 na górze i 2 na dole). Dostaniemy wtedy rysunek 2. Teraz przenumerujmy po kolei wierzchołki na górze i na dole. Widzimy, że rysunek 3 przedstawia permutację $321 \in S_3$. Możemy więc stwierdzić, że permutacja 2431 zawiera permutację 321, co będziemy zapisywać $321 \preceq 2431$. Tę obrazkową definicję możemy sformalizować.



Rys. 3

Definicja 1. *Niech $k \leqslant n$ będą dwoma dodatnimi liczbami całkowitymi i niech $\sigma \in S_k$ i $\tau \in S_n$ będą dwoma permutacjami. Jeśli istnieją takie $1 \leqslant x_1 < \ldots < x_k \leqslant n$, że dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant k$ warunek $\sigma(i) < \sigma(j)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek $\tau(x_i) < \tau(x_j)$, to powiemy, że τ zawiera σ, co zapiszemy $\sigma \preceq \tau$.*

Czytelnik Zaznajomiony z definicją częściowego porządku natychmiast dostrzeże, że relacja $\preceq$ spełnia jego aksjomaty. W szczególności zaznaczmy, że relacja $\preceq$ jest przechodnia, tj. jeśli dla pewnych permutacji zachodzi $\sigma \preceq \tau$ i $\tau \preceq \psi$, to także $\sigma \preceq \psi$. Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Warto tutaj dodać, że według Vaughana Pratta (informatyka, którego Czytelnik Zainteresowany algorytmiką kojarzy na pewno z algorytmu KMP) $\preceq$ *zdaje się być jedynym porządkiem częściowym na permutacjach, który pojawia się w prosty i naturalny sposób.* W tym artykule zajmiemy się pewnym problemem informatycznym, w którym pojęcie zawierania się permutacji okaże się pomocne.

Permutacje na stosie

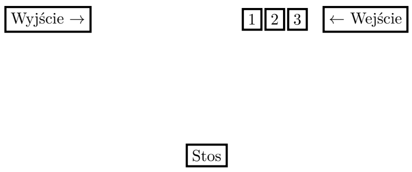
Załóżmy, że mamy na wejściu permutację z S_n zapisaną jako ciąg $123\ldots n$ (tę permutację będziemy nazywać identycznością i oznaczać przez id_n). Chcemy za pomocą jednego stosu przekształcić ją w jakąś inną permutację. W tym celu w każdym ruchu możemy:

- zdjąć liczbę ze szczytu stosu i dopisać ją do wyjściowej permutacji albo
- wziąć liczbę z początku wejściowej permutacji i umieścić ją na szczycie stosu.

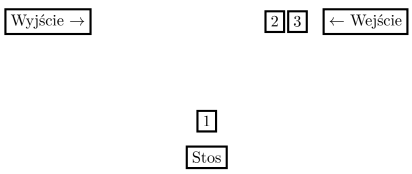
Wykonujemy ruchy tak długo, aż wszystkie liczby z wejściowej permutacji zostaną przeniesione do wyjściowej permutacji. Przykładowy proces przekształcania 123 w 231 jest przedstawiony na rysunkach na marginesie.

W swojej książce *Sztuka programowania* Donald Knuth zadał następujące pytanie – jakie permutacje możemy uzyskać w opisany powyżej sposób z permutacji id_n? Wiemy póki co, że z permutacji 123 możemy uzyskać 231. Zachęcam Czytelnika do ręcznego sprawdzenia, że możemy uzyskać także permutacje 123, 213, 132 i 321, ale nie możemy uzyskać 312. Okazuje się, że tę obserwację da się uogólnić, ujmując w następujące twierdzenie.

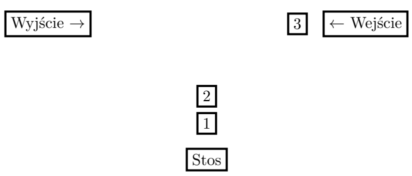
Twierdzenie 1. *Permutację $\sigma \in S_n$ da się uzyskać z permutacji id_n przy użyciu jednego stosu w sposób opisany powyżej wtedy i tylko wtedy, gdy $312 \not\preceq \sigma$.*



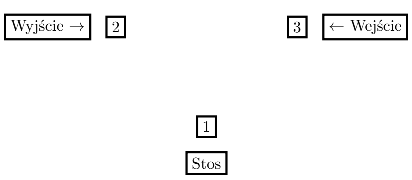
(a) Zaczynamy z permutacją 123 na wejściu



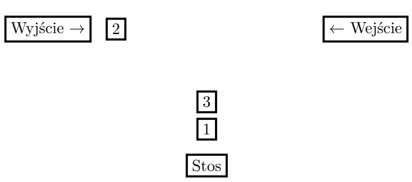
(b) Zdejmujemy 1 z wejścia na stos



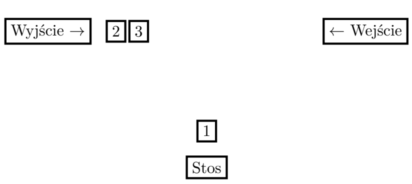
(c) Zdejmujemy 2 z wejścia na stos



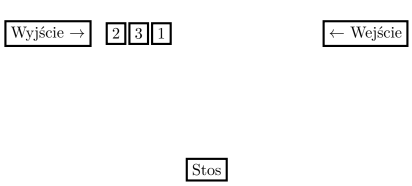
(d) Przenosimy 2 ze stosu na wyjście



(e) Zdejmujemy 3 z wejścia na stos



(f) Przenosimy 3 ze stosu na wyjście



(g) Przenosimy 1 ze stosu na wyjście

Dowód tego twierdzenia nie jest szczególnie skomplikowany, ale wymaga pewnych intuicji dotyczących procesu przekształcania permutacji z użyciem stosu. Zachęcam więc Czytelnika do samodzielnej próby udowodnienia powyższego twierdzenia, a dopiero potem do przeczytania poniższego dowodu.

Dowód. Najpierw pokażemy, że jeśli $312 \preceq \sigma \in S_n$, to σ nie da się uzyskać w opisany sposób. Załóżmy nie wprost, że σ jednak da się jakoś uzyskać. Skoro $312 \preceq \sigma$, to mamy takie $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, że $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$. To daje nam, że liczby $\sigma(j)$ i $\sigma(k)$ muszą być zdjęte z wejścia przed $\sigma(i)$. Z drugiej strony, skoro $i < j < k$, to $\sigma(i)$ musi być zdjęta ze stosu przed $\sigma(j)$ i $\sigma(k)$. Nietrudno zauważyć, że liczby na stosie leżą posortowane, więc kiedy zdejmujemy $\sigma(i)$ ze stosu, to $\sigma(j)$ leży pod $\sigma(k)$. W związku z tym $\sigma(k)$ będzie wypisana na wyjście przed $\sigma(j)$, co jest w sprzeczności z tym, że $j < k$.

Teraz pokażemy, jak uzyskać permutację $\sigma \in S_n$ taką, że $312 \not\preceq \sigma$. W tym celu wystarczy zastosować następujący algorytm. Po kolei dla $j = 1, 2, \ldots, n$ wkładamy na stos 0 lub więcej kolejnych liczb z wejścia, aż na jego wierzchołku pojawi się $\sigma(j)$. Wtedy liczbę tę zdejmujemy ze stosu i zapisujemy na wyjściu. Zauważmy, że ten algorytm nie zadziała tylko wtedy, gdy dojdziemy do jakiegoś j i liczba $\sigma(j)$ będzie już na stosie, ale nie na jego szczycie. To znaczy, że wyżej od $\sigma(j)$ będzie jakieś $\sigma(k)$ dla pewnego $k > j$. Ponadto musi też być $\sigma(k) > \sigma(j)$, bo liczby na stosie są posortowane. Liczba $\sigma(k)$ została umieszczona na stosie, kiedy rozważaliśmy pewne $i < j$ i zachodziło $\sigma(k) < \sigma(i)$. Łącząc te nierówności, dostajemy $i < j < k$ oraz $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$, czyli $312 \preceq \sigma$. To kończy dowód drugiej implikacji. $\square$

Klasy permutacji

Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolnym zbiorem permutacji. Powiemy, że $\mathcal{C}$ jest *klasą permutacji,* jeśli jest zamknięty w dół, tj. spełnia następujący warunek:

$$\text{dla każdego } \sigma \in \mathcal{C} \text{ jeśli } \tau \preceq \sigma, \text{ to } \tau \in \mathcal{C}.$$

Pierwszym przykładem klasy permutacji jest po prostu zbiór wszystkich permutacji. Taką klasę permutacji nazwiemy niewłaściwą, zaś każdą inną będziemy nazywać właściwą.

Naturalnym przykładem właściwych klas permutacji są zbiory permutacji, które nie zawierają ustalonej permutacji (czasem mówi się *unikają ustalonego wzorca*). Dla ustalonej permutacji τ przez $\mathrm{Av}_n(\tau)$ (od angielskiego *avoid*) definiujemy zbiór tych wszystkich permutacji z S_n, które nie zawierają τ. Formalnie $\mathrm{Av}_n(\tau) = \{\sigma \in S_n : \tau \not\preceq \sigma\}$. Przez $\mathrm{Av}(\tau)$ oznaczamy sumę $\mathrm{Av}_n(\tau)$ po wszystkich n, tj. $\mathrm{Av}(\tau) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Av}_n(\tau)$. Nietrudno zobaczyć, że dla dowolnego τ zbiór $\mathrm{Av}(\tau)$ jest właśnie klasą permutacji.

To podejście można uogólnić i dla dowolnego zbioru permutacji T (być może nawet nieskończonego) przez $\mathrm{Av}_n(T)$ oznaczamy wszystkie te permutacje z S_n, które nie zawierają żadnej permutacji z T. Formalnie $\mathrm{Av}_n(T) = \{\sigma \in S_n : \forall_{\tau \in T} \tau \not\preceq \sigma\}$. Znów możemy napisać: $\mathrm{Av}(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Av}_n(T)$. Jako zadanie dla Czytelnika pozostawiamy sprawdzenie następującej obserwacji – jeśli $\mathcal{C}$ jest klasą permutacji, zaś T jest zbiorem wszystkich tych permutacji, które nie należą do $\mathcal{C}$, to $\mathcal{C} = \mathrm{Av}(T)$.

Na koniec tej części zauważmy jeszcze, że twierdzenie 1 mówi, że zbiór permutacji, które przy użyciu jednego stosu da się uzyskać z id_n, to dokładnie $\mathrm{Av}_n(312)$.

Zliczamy permutacje

Dość ciekawym problemem kombinatorycznym jest zbadanie, jak dla ustalonego zbioru permutacji T rośnie $|\mathrm{Av}_n(T)|$ wraz ze wzrostem n. Obliczmy teraz dokładnie $|\mathrm{Av}_n(312)|$, wykorzystując nasze poprzednie rozważania o przetwarzaniu permutacji przy użyciu jednego stosu.

Zastanówmy się, jak w zwięzły sposób można opisać procedurę uzyskiwania permutacji 231 z permutacji 123. Mieliśmy do dyspozycji dwie operacje – wkładania z wejścia na stos (S) i zdejmowania ze stosu na wyjście (X). Ciąg operacji, który wykonaliśmy, możemy zapisać jako ciąg długości 6 składający się z 3 operacji S i 3 operacji X, konkretnie $SSXSXX$. Łatwo zauważyć, że procedurę uzyskiwania permutacji $\sigma \in S_n$ z permutacji id_n możemy zapisać jako ciąg długości $2n$ składający się z n operacji S i n operacji X. Ponadto nie możemy wykonać operacji X, kiedy stos jest pusty. W związku z tym w żadnym prefiksie takiego ciągu (czyli podciągu długości k składającego się z k pierwszych operacji) liczba X'ów nie jest większa od liczby S'ów. Ciągi spełniające te warunki nazwiemy *poprawnymi*. Zauważmy, że oczywiście każdy poprawny ciąg operacji opisuje jakąś procedurę, którą da się wykonać i która wyprodukuje jakąś permutację.

Zauważmy, że jeśli zamiast S i X pisalibyśmy (i), to poprawne ciągi operacji odpowiadają poprawnym nawiasowaniom.

Rozważmy teraz dwa różne poprawne ciągi c_1, c_2 i spójrzmy na pierwszą od lewej pozycję, na której się różnią. Jeden z nich ma wtedy operację X, drugi zaś operację S. Ten z X'em wypisze na wyjście jakąś liczbę, która zostanie w tym drugim przykryta na wierzchołku stosu przez inną, co pokazuje, że c_1 i c_2 generują różne permutacje. Skoro każde dwa poprawne ciągi generują różne permutacje, to żeby obliczyć $|\mathrm{Av}_n(312)|$, musimy policzyć, ile jest poprawnych ciągów długości $2n$. Przedstawimy tutaj tylko wskazówki, jak wykonać odpowiednie obliczenia, pozostawiając Czytelnikowi doprecyzowanie szczegółów (lub sięgnięcie do artykułu *Tożsamość Cauchy'ego, iloczyn Wallisa i wzór Stirlinga* z Δ^{8}_{22}, gdzie szczegóły te są dokładnie przedstawione).

Oczywiście mamy $\binom{2n}{n}$ wszystkich ciągów długości $2n$ zawierających n operacji X i n operacji S. Policzymy, ile spośród nich nie jest *poprawnych*. W każdym takim ciągu możemy znaleźć pierwszą pozycję k z operacją X taką, że do pozycji k (włącznie z nią) liczba X'ów jest większa od liczby S'ów. Zamieńmy w prefiksie danego ciągu do tego X'a włącznie wszystkie X'y na S'y, a wszystkie S'y na X'y. W ten sposób dostajemy ciąg, który zawiera dokładnie $(n+1)$ operacji S i $(n-1)$ operacji X. Zauważmy, że ten proces można odwrócić – dla każdego ciągu z $(n+1)$ S'ami i $(n-1)$ X'ami możemy znaleźć niepoprawny ciąg, w którym jest po n operacji X i S, z którego on powstał. Na przykład ciąg $XXSXSSSSXXSSS$ musiał powstać z ciągu $SSXSXXXXXXSSS$. To daje nam, że wszystkich poprawnych ciągów jest:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Jako ciekawostkę powiedzmy, że otrzymany wzór opisuje n-tą liczbę Catalana, oznaczaną C_n. Liczby te pojawiają się w naturalny sposób w różnych problemach kombinatorycznych, o których można by napisać wiele kolejnych artykułów.

O liczbach Catalana pisaliśmy w Δ^{02}_{11} w artykule „Jak zaparkować samochód?" i w Δ^{03}_{14} w artykule „Bardzo oszczędne drzewa".

Hipoteza Stanleya–Wilfa

Udało nam się już udowodnić, że $|\mathrm{Av}_n(312)| = C_n$. Okazuje się, co pokazali Donald Knuth i Percy MacMahon, że dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_3$ (nie tylko 312) zachodzi $|\mathrm{Av}_n(\sigma)| = C_n$. Ogólnie jednak dla większych n nie ma analogicznych równości dla wszystkich permutacji z S_n – już dla S_4 mamy $|\mathrm{Av}_6(1342)| = 512 \neq 513 = |\mathrm{Av}_6(1234)|$.

Wracając do S_3 i liczb Catalana, można łatwo wykazać, że:

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}C_n,$$

co daje nam $C_n \leqslant 4^n$. Mamy więc $|\mathrm{Av}_n(\sigma)| \leqslant 4^n$ dla każdego $\sigma \in S_3$. Zwróćmy uwagę, że wszystkich permutacji w S_n jest $n!$ zaś $4^n < o(n!)$, więc jest to znacząco lepsze oszacowanie od oszacowania naiwnego, przez liczbę wszystkich permutacji w S_n.

W późnych latach 80. XX wieku Richard Stanley i Herbert Wilf niezależnie postawili hipotezę, że dla dowolnego k i dowolnej permutacji $\sigma \in S_k$ istnieje stała K taka, że $|\mathrm{Av}_n(\sigma)| \leqslant K^n$ dla każdego n. Hipoteza ta była otwarta przez kilkanaście lat, aż w końcu została udowodniona w 2004 roku przez Adama Marcusa i Gábora Tardosa. Mimo tak długiego czasu, który upłynął od postawienia hipotezy do jej rozwiązania, dowód przedstawiony przez Marcusa i Tardosa okazał się zaskakująco prosty i elegancki. Będzie on tematem kolejnej części tego artykułu, która zostanie opublikowana w następnym numerze *Delty*.

Rozwiązanie zadania M 1721.
Łatwo przekonać się, że $p > 2$. Oznaczmy przez b, gdzie $1 < b < p$, liczbę bloków, na jakie podzieliliśmy nasz ciąg, i załóżmy, że suma w każdym takim bloku jest równa S. Wtedy

$$bS = 1 + 2 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2} \equiv 0 \pmod{p},$$

skąd $p \mid S$, gdyż $p > b$.

Weźmy teraz pod uwagę pierwszy blok liczb: $1, 2, \ldots, k$, dla pewnego $k < p$ o sumie S równej $\frac{k(k+1)}{2}$. W tej sytuacji $p \mid S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \mid (k+1)$ (gdyż $k < p$), a zatem, ponownie korzystając z nierówności $k < p$, dostajemy $k = p - 1$. W związku z tym następny blok może zawierać tylko liczbę p, skąd i z równości sum wynika $p = \frac{(p-1)p}{2}$, a zatem musi być $p = 3$. Łatwo sprawdzić, że następujący podział $\{1, 2\}, \{3\}$ liczb 1, 2, 3 spełnia warunki zadania.