Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2022

Zadania z matematyki nr 845, 846

Redaguje Marcin E. KUCZMA

845. Udowodnić nierówność dla liczb nieujemnych $x_1,\ldots,x_n$ oraz $y_1,\ldots,y_n$:

$$\Bigl(\sum_{i\neq j} x_i y_j\Bigr)^2 \geqslant \Bigl(\sum_{i\neq j} x_i x_j\Bigr)\Bigl(\sum_{i\neq j} y_i y_j\Bigr)$$

(każda z trzech napisanych sum ma $n(n-1)$ składników odpowiadających wszystkim uporządkowanym parom (i,j) różnych numerów $i,j\in\{1,\ldots,n\}$).

846. Ostrosłup ścięty, którego podstawami są podobne wielokąty o znanych polach A i B, został podzielony płaszczyznami $\pi_1,\ldots,\pi_{n-1}$, równoległymi do podstaw, na n wielościanów o równych objętościach; płaszczyzna π_k leży między płaszczyznami π_{k-1} i π_{k+1} (dla $k=1,\ldots,n-1$), gdzie π_0, π_n to płaszczyzny zawierające, odpowiednio, podstawy o polach A, B. Obliczyć pole przekroju ostrosłupa każdą z płaszczyzn π_k.

Zadanie 846 zaproponował pan Mirosław Matlęga ze Skoczowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2022

Przypominamy treść zadań:

841. Dla zadanej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ ustalić, ile jest ciągów liczb rzeczywistych $(a_1,\ldots,a_n)$ o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_1,\ldots,x_n)$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{n}\Bigl|\sum_{j=1}^{n} a_{i+j}x_j\Bigr| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$

gdzie (cyklicznie) $a_r=a_{r-n}$ dla $r>n$.

842. Na płaszczyźnie dane są trzy koła (domknięte, tj. rozważane wraz z punktami brzegu). Zakładamy, że ich część wspólna jest niepusta. Przesuwamy każde koło (niezależnie) w taki sposób, że dla każdych dwóch kół odległość ich środków po przesunięciu jest nie większa niż przed przesunięciem. Udowodnić, że przesunięte koła nadal mają niepustą część wspólną.

841. Niech $(a_1,\ldots,a_n)$ będzie ciągiem spełniającym podany warunek. Ustalmy liczby $k\in\{1,\ldots,n{-}1\}$ oraz $\varepsilon\in\{1,-1\}$ i podstawmy w równaniu: $x_n=1$, $x_k=\varepsilon$, $x_j=0$ dla $j\neq k,n$. Ponieważ $a_{i+n}=a_i$, otrzymujemy

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}|\varepsilon a_{i+k}+a_i| = 2.$$

Z kolei weźmy $x_n=1$, $x_j=0$ dla wszystkich $j<n$; dostajemy

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n}|a_i| = 1.$$

Szacujemy z góry lewą stronę wzoru (1) (korzystając z cykliczności ciągu (a_i) oraz ze wzoru (2)):

$$\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon a_{i+k}+a_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\bigl(|a_{i+k}|+|a_i|\bigr) = \sum_{i=1}^{n}|a_i| + \sum_{i=1}^{n}|a_i| = 2.$$

Lewa strona ma wartość 2 (wzór (1)), co oznacza, że ta nierówność musi być równością; czyli że $|\varepsilon a_{i+k}+a_i| = |a_{i+k}|+|a_i|$ dla wszystkich i. Po podniesieniu do kwadratu i redukcji mamy

$$\varepsilon a_{i+k}a_i = |a_{i+k}a_i| \quad \text{dla } i=1,\ldots,n.$$

Skoro to prawda zarówno dla $\varepsilon=1$, jak i dla $\varepsilon=-1$, zatem $a_{i+k}a_i=0$ dla wszystkich i. Wobec dowolności $k\in\{1,\ldots,n{-}1\}$ znaczy to, że w ciągu $(a_1,\ldots,a_n)$ tylko jeden wyraz może być niezerowy. Wobec wzoru (2) ma on moduł 1.

Stąd wynika postać rozważanych ciągów $(a_1,\ldots,a_n)$: na dowolnie wybranej pozycji liczba ±1, poza tym zera; przy tym każdy ciąg takiej postaci ma własność wymaganą w zadaniu. Jest więc $2n$ takich ciągów.

842. Oznaczmy środki trzech danych kół przez A, B, C, zaś ich promienie r_A, r_B, r_C. Wybierzmy i ustalmy punkt P leżący w części wspólnej tych kół: $AP\leqslant r_A$, $BP\leqslant r_B$, $CP\leqslant r_C$. Przesunięcia, o jakich mowa, przenoszą środki do położeń A', B', C'. Ustalmy oznaczenia tak, by AB był tym bokiem trójkąta ABC, który w najmniejszym stopniu ulega skróceniu przy tych przesunięciach. Istnieje więc taka liczba $k\leqslant 1$, że

$$(3)\qquad A'B'=k\cdot AB,\quad A'C'\leqslant k\cdot AC,\quad B'C'\leqslant k\cdot BC.$$

Niech D będzie punktem leżącym po tej stronie prostej AB, co punkt C, i takim, że trójkąt ABD jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Skoro $A'B'=k\cdot AB$, znaczy to, że $A'C'=k\cdot AD$, $B'C'=k\cdot BD$, i wobec oszacowań (3):

$$(4)\qquad AD\leqslant AC,\qquad BD\leqslant BC.$$

Będziemy chcieli znaleźć punkt Q spełniający warunki

$$(5)\qquad AQ\leqslant AP,\qquad BQ\leqslant BP,\qquad DQ\leqslant CP.$$

Wówczas podobieństwo (o skali k), przekształcające trójkąt ABD na trójkąt $A'B'C'$, przeniesie ów punkt Q do położenia Q', dla którego, zgodnie z zależnościami (5),

$$A'Q' = k\cdot AQ\leqslant k\cdot AP\leqslant kr_A\leqslant r_A,$$

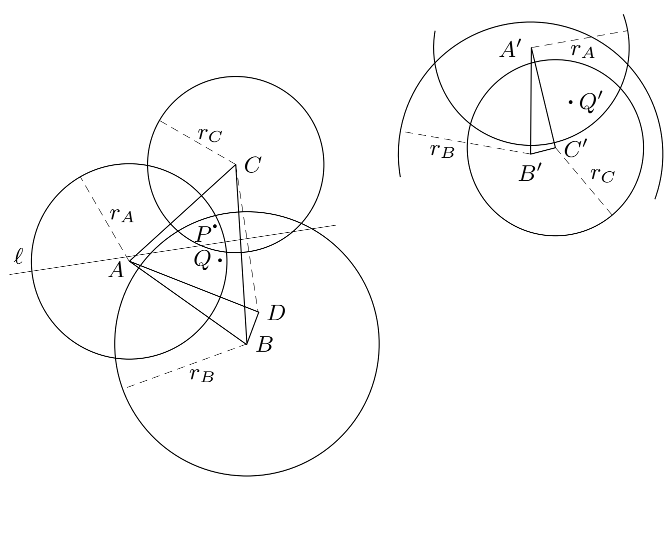
i podobnie

$$B'Q'\leqslant r_B,\qquad C'Q'\leqslant r_C.$$

Punkt Q' znajdzie się więc w części wspólnej kół o środkach A', B', C' i promieniach r_A, r_B, r_C, co zakończy dowód tezy zadania. Pozostaje wskazać punkt Q o własnościach (5).

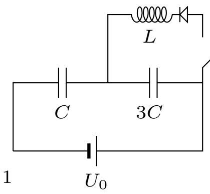
Jeżeli $DP\leqslant CP$, można przyjąć po prostu $Q=P$.

W przeciwnym przypadku, tj. gdy $DP>CP$ (rysunek), niech Q będzie punktem symetrycznym do P względem prostej ℓ, symetralnej odcinka CD. Leży on po tej stronie owej prostej, co punkt D. Z uwagi na nierówności (4), po tejże stronie prostej ℓ leżą także punkty A i B. Czworokąt $CDQP$ jest trapezem równoramiennym ($DQ=CP$), bo prosta ℓ jest też symetralną odcinka PQ. Z położenia punktów A,B,D,Q po jednej jej stronie wynikają dwie pierwsze z potrzebnych nam nierówności (5); trzecia zaś, jak zauważyliśmy, staje się równością. Tak określony punkt Q ma zatem wymagane własności; dowód jest zakończony.

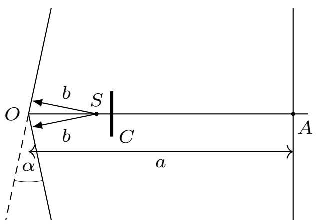


Klub 44 F

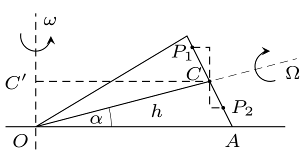
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2022



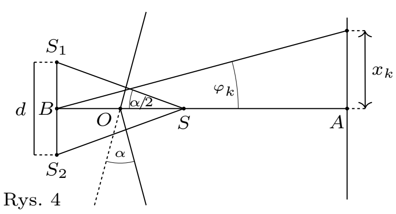
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 835 ($WT = 2{,}59$) i 836 ($WT = 1{,}49$) z numeru 2/2022

Witold Bednarek	Łódź	45,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	44,89
Kacper Morawski	Warszawa	43,56
Marek Spychała	Warszawa	42,59
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Paweł Najman	Kraków	38,67
Michał Adamaszek	Kopenhaga	37,37
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Radosław Kujawa	Wrocław	33,74
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,68
Jerzy Cisło	Wrocław	32,66

Przekroczenia linii *44* podzielne przez 3: pan **Andrzej Kurach** po raz trzeci– więc dołącza do grona Weteranów; zaś pan **Witold Bednarek** po raz dziewiąty – więc jakby „Weteran do kwadratu” (w historii Ligi – piąty uczestnik, który tego dokonał).

Zadania z fizyki nr 742, 743

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

742. Mała drewniana kulka przymocowana jest za pomocą nierozciągliwej nici o długości $l = 30$ cm do dna cylindrycznego naczynia z wodą. Odległość środka dna do punktu zaczepienia nici $r = 20$ cm. Naczynie rozkręcono wokół osi pionowej przechodzącej przez środek dna. Przy jakiej prędkości kątowej nić odchyla się od pionu o kąt $\alpha = \pi/6$?

743. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 ze źródłem o sile elektromotorycznej U_0 i zaniedbywalnym oporze wewnętrznym połączone są szeregowo kondensatory o pojemnościach C i $3C$. Po zamknięciu klucza K równolegle do kondensatora o pojemności $3C$ dołączamy połączone szeregowo cewkę o indukcyjności L oraz idealną diodę. a) Znaleźć maksymalną wartość natężenia prądu płynącego przez cewkę. b) Jakie będzie napięcie na kondensatorze o pojemności C, gdy prąd przestanie płynąć przez cewkę? c) Ile czasu prąd będzie płynął przez cewkę?

Rozwiązania zadań z numeru 5/2022

Przypominamy treść zadań:

738. Stożek toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej. Oś stożka obraca się z prędkością kątową ω wokół osi pionowej, przechodzącej przez jego wierzchołek. Wysokość stożka wynosi h, kąt między osią stożka a jego tworzącą jest równy α. Wyznaczyć prędkość liniową dowolnego punktu średnicy podstawy stożka leżącej w płaszczyźnie pionowej.

739. Dwa zwierciadła płaskie tworzą między sobą kąt $(\pi - \alpha)$, przy czym kąt α jest bardzo mały (rys. 2). W równych odległościach b od obu zwierciadeł znajduje się punktowe źródło światła monochromatycznego S. Długość fali emitowanej przez źródło wynosi λ. W odległości $|OA| = a$ od punktu przecięcia zwierciadeł umieszczony jest ekran. Znaleźć odległość między sąsiednimi jasnymi prążkami interferencyjnymi na ekranie. Przesłona C zapobiega bezpośredniemu padaniu światła ze źródła na ekran.

738. Ruch stożka jest złożeniem obrotu jego osi OC wokół prostej pionowej przechodzącej przez punkt O oraz obrotu wokół osi stożka z prędkością kątową Ω (rys. 3). Ruch odbywa się bez poślizgu, zatem punkt A na tworzącej stykającej się w danej chwili z podłożem nie porusza się względem podłoża: $\omega\,|OA| = \Omega h \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $|OA| = h/\cos\alpha$. Stąd $\Omega = \omega/\sin\alpha$.

Prędkość dowolnego punktu P_1 leżącego powyżej środka podstawy w odległości r od niego dana jest wzorem:

$$v_1 = \omega(|CC'| - r\sin\alpha) + \Omega r = \omega(h\cos\alpha - r\sin\alpha) + \omega r/\sin\alpha.$$

Prędkość punktu P_2 leżącego poniżej punktu C wynosi

$$v_2 = \omega(h\cos\alpha + r\sin\alpha) - \omega r/\sin\alpha.$$

739. Oznaczmy obrazy źródła światła w zwierciadłach przez S_1 i S_2 (rys. 4). Odległość między nimi wynosi

(1) $$d = 4b\sin(\alpha/2) \approx 2b\alpha$$

i jest dużo mniejsza od odległości odcinka S_1S_2 od ekranu: $|BA| \approx a + b$.

Oznaczając przez φ_k kąt odpowiadający k-temu maksimum na ekranie, możemy napisać

(2) $$d\,(\sin\varphi_k - \sin\varphi_{k-1}) = \lambda.$$

Jeżeli ograniczymy się do małych kątów φ, to $\sin\varphi_k \approx x_k/(a+b)$, gdzie x_k jest odległością k-tego maksimum od środka ekranu. Podstawiając to do (2) i uwzględniając (1), otrzymujemy szukaną odległość między prążkami:

(3) $$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \lambda\,(a+b)/2b\alpha.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.