Student Jan powinien być zadowolony z wyjaśnień swojego ulubionego profesora, ale nie jest: *Rozumiem, że w przypadku* $|B| \leqslant |A|$ *postępujemy analogicznie, ale co zrobić w przypadku, gdy ani* $|A| \leqslant |B|$, *ani* $|B| \leqslant |A|$*?*

A teraz odpowiedź profesora rozpromienionego wobec dociekliwości Jana: *To się nie może zdarzyć! A przynajmniej nie, jeśli przyjmiemy pewnik wyboru, czyli zasadę mówiącą, że dla dowolnej rodziny niepustych zbiorów rozłącznych istnieje zbiór o jednoelementowym przecięciu z każdym zbiorem z tej rodziny. Ujmując rzecz mniej formalnie, ze zbiorów rozłącznych możemy wybrać po jednym elemencie. Opierając się na pewniku wyboru, można udowodnić, że dla dowolnych zbiorów* A, B *mamy* $|A| \leqslant |B|$ *lub* $|B| \leqslant |A|$*. Dowód implikacji*

$$|A| \leqslant |B| \Rightarrow |A \cup B| = |B| \quad \textit{(gdy B jest nieskończony)}$$

też zresztą wymaga zastosowania pewnika wyboru. Mając zresztą pewną wprawę w operowaniu tymi pojęciami, można pokazać, że z twierdzenia:

> Jeśli A, B, C, D spełniają warunki:
> (W1) $|A| = |C|$ oraz $|B| = |D|$,
> (W2)′ nie wszystkie zbiory A, B, C, D są skończone,
> to $|A \cup B| = |C \cup D|$,

wynika pewnik wyboru! Z tego twierdzenia wynika więc pośrednio, że kulę można podzielić na kilka części, z których można złożyć dwie pełne kule o tym samym promieniu, czyli twierdzenie Banacha–Tarskiego.

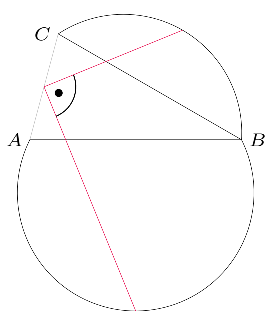
Ciekawość to pierwszy stopień do cantorowskiego raju[‡] – uśmiech profesora zasiewa ziarenko wątpliwości w ekonomicznym umyśle Jana: *To mi się chyba nie przyda (?), ale to jest ciekawe. Muszę się tego nauczyć! Nauczę się tego!* Niedoszły ekonomista Jan zaczyna chodzić z głową w chmurach: *Ta wyjściowa kula chyba, niestety, nie jest ze złota. . .*

[‡] I znowu Hilbertowi przypisuje się powiedzenie, że nikt nie wypędzi matematyków z raju teorii mnogości, który stworzył dla nich Cantor.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1717. Okrąg został podzielony cięciwą AB na dwa kołowe odcinki i jeden z nich został obrócony o pewien kąt wokół punktu B. W tym obrocie obrazem punktu A jest punkt C. Udowodnić, że odcinki łączące środki łuków odcinków kołowych ze środkiem odcinka AC są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 21



M 1718. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y i z, że liczby $x + yz$, $y + zx$ i $z + xy$ są wymierne oraz $x^2 + y^2 = 1$. Udowodnić, że liczba xyz^2 również jest wymierna.
Rozwiązanie na str. 12

M 1719. Wszystkie liczby naturalne zostały ustawione w pewnej kolejności. Czy zawsze mogę wskazać kilka kolejnych liczb (co najmniej dwie), których suma jest liczbą pierwszą?
Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1053. W grudniu 2021 roku ludność Ziemi osiągnęła $N \approx 7{,}9 \cdot 10^9$ osób. Oszacuj, ile kilogramów powietrza przypada na jednego mieszkańca Ziemi. Promień Ziemi $R \approx 6400$ km, przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s^2, a ciśnienie atmosferyczne $p \approx 10^5$ Pa.
Rozwiązanie na str. 12

F 1054. W sierpniu, z maksimum w dniach 12–13 sierpnia, na nocnym niebie można zaobserwować meteory z roju Perseidów. Pomiary radiolokacyjne pozwalają wyznaczyć prędkość przemieszczania się meteoru względem Ziemi i na tej podstawie określić prędkość jego ruchu względem Słońca. Jak na podstawie pomiaru prędkości v meteoru w znanej odległości r od Słońca wyznaczyć długą półoś a orbity? Masa Słońca M_S i stała grawitacyjna G są znane.
Rozwiązanie na str. 13