

# Tożsamość Cauchy’ego, iloczyn Wallisa i wzór Stirlinga

\*Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza  
w Poznaniu

Bartłomiej BZDEGA\*

## Wstęp

Celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie wzoru Stirlinga przybliżającego  $n!$ , a przy okazji pokazanie kawałka ładnej matematyki. Umyślnie zatem nie pójdziemy najkrótszą drogą, lecz drogą, która jest możliwie elementarna i pozwala zwiedzającym rozejrzeć się od czasu do czasu.

Punktem wyjścia będzie *tożsamość Cauchy’ego*

$$(1) \quad 4^n = \sum_{i+j=n} \binom{2i}{i} \binom{2j}{j},$$

której przedstawiony tu dowód kombinatoryczny pochodzi z książki *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa* Williama Feller’a (jestem bardzo wdzięczny profesorowi Piotrowi Śniademu z Polskiej Akademii Nauk za wskazanie tego źródła).

Dowód równości w *iloczynie Wallisa*

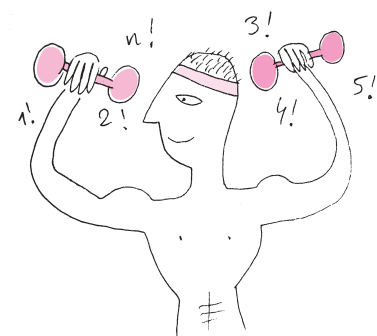
$$(2) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \cdot \dots,$$

który tu zamieszczam, jest lekką modyfikacją dowodu z artykułu Johana Wästlunda zatytułowanego *An elementary proof of Wallis’ product formula for pi*. Zmiana polega na wykorzystaniu tożsamości Cauchy’ego.

Dowód *wzoru Stirlinga*

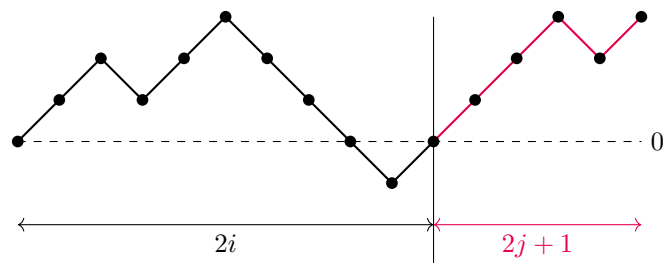
$$(3) \quad n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

korzystający z iloczynu Wallisa, zaczerpnąłem z materiałów dydaktycznych *Stirling approximation formula* profesora Jacka Cichonia z Politechniki Wrocławskiej, czyniąc gdzieś drobne uproszczenia.



## 1. Tożsamość Cauchy’ego

Lewą stronę równości (1) można zinterpretować – dość nietypowo – jako liczbę ciągów binarnych długości  $2n + 1$ , z przewagą jedynek nad zerami. Przedstawiamy je graficznie jako *szlaki górskie*, które rozpoczynają się na wysokości 0 i składają się z  $2n + 1$  *kroków* tej samej długości, wiodących w górę (odpowiednik jedynki) lub w dół (odpowiednik zera) pod kątem  $45^\circ$ . Wszystkie takie szlaki kończą się na nieparzystej wysokości powyżej poziomu 0. Na poniższym rysunku widnieje przykładowy szlak.



Liczbę kroków szlaku będziemy nazywać jego *długością*, a różnicę wysokości pomiędzy końcem i początkiem – jego *względna wysokość*. Wyróżnione punkty na szlaku możemy interpretować jako wartości funkcji określonej na pewnym zbiorze kolejnych liczb całkowitych i przyjmującej wartości całkowite. Każdy punkt znajdujący się na wysokości 0 będziemy nazywać *miejscem zerowym* szlaku, w analogii do funkcji. Oznaczmy pionową linią – *przegrodą* – ostatnie miejsce

zerowe. Dzieli ono szlak na dwie części spełniające następujące warunki:

- (C1) pierwsza część (szlak długości  $2i$ ) zaczyna się i kończy na wysokości 0;
- (C2) druga część (szlak długości  $2j + 1$ ), nie licząc początku, znajduje się całkowicie powyżej poziomu 0.

Miejscem podziału może być początek szlaku – wtedy pierwsza część zostaje zdegenerowana do punktu. Zwróćmy uwagę, że suma współrzędnych każdego punktu szlaku jest tej samej parzystości, w szczególności pierwsza część szlaku zawsze ma parzystą długość.

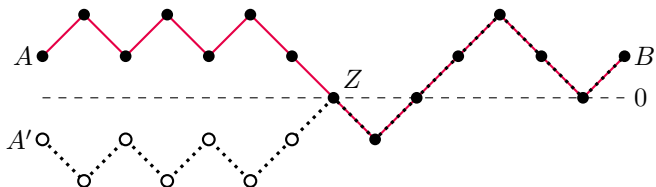
Wykażemy, że liczba szlaków z przegrodą umieszczoną tak jak na rysunku wynosi  $\binom{2i}{i} \binom{2j}{j}$ . W pierwszej części mamy  $i$  kroków w górę i tyle samo w dół, co daje dokładnie  $\binom{2i}{i}$  możliwości, nawet jeśli ta część jest zdegenerowana.

Z drugą częścią nie jest już tak łatwo. Będziemy potrzebować następującej zasady.

**Zasada odbicia.** Niech  $A = (x_a, y_a)$  i  $B = (x_b, y_b)$ , przy czym  $y_a, y_b > 0$  i  $x_a < x_b$ . Ponadto niech  $A'$  będzie punktem symetrycznym do  $A$  względem osi  $OX$ . Wówczas zbiory szlaków:

- $S_1$  – łączących  $A$  i  $B$  mających co najmniej jedno miejsce zerowe,
- $S_2$  – wszystkich łączących  $A'$  i  $B$  są równoliczne.

*Dowód.* Na każdym szlaku  $s \in S_1$  odnajdźmy jego pierwsze miejsce zerowe  $Z$ , następnie odbijmy część od  $A$  do  $Z$  symetrycznie względem osi  $OX$ . Złączając odbitą część z pozostałą, otrzymamy szlak  $f(s)$ , na rysunku zaznaczony linią przerywaną.



Z drugiej strony, każdy szlak  $s' \in S_2$  zaczyna się poniżej zera, a kończy powyżej, więc ma miejsce zerowe (można to nazwać *dyskretną własnością Darboux*). Możemy więc, analogicznie jak dla szlaku  $s \in S_1$ , odbić względem osi  $OX$  część szlaku  $s'$  od  $A'$  do pierwszego miejsca zerowego. Tak określone odwzorowanie jest odwrotne do  $f$ . To dowodzi, że  $f$  jest bijekcją, więc  $|S_1| = |S_2|$ .  $\square$

Oznaczmy przez  $S_{u,d}$  zbiór szlaków o  $u$  krokach w górę i  $d$  krokach w dół, które rozpoczynają się w ustalonym punkcie. Oczywiście  $|S_{u,d}| = \binom{u+d}{u}$ . Nas interesuje liczba szlaków rozpoczynających się w punkcie  $O$ , bez miejsc zerowych poza nim. Zbiór takich szlaków oznaczmy przez  $S_{u,d}^*$ , przy czym  $u$  i  $d$  określamy jak wyżej. Poniższe twierdzenie mówi nam, ile ich jest.

**Twierdzenie Bertranda.** *Zachodzi równość*

$$|S_{u,d}^*| = \frac{u-d}{u+d} \binom{u+d}{d}.$$

*Dowód.* Każdy szlak  $s \in S_{u,d}^*$  zaczyna się krokiem w górę, możemy więc rozważać szlaki mające początek w punkcie  $A = (1,1)$  i koniec w  $B = (u+d, u-d)$ . Wszystkich takich szlaków jest  $|S_{u-1,d}| = \binom{u+d-1}{d}$  (wykorzystaliśmy jeden krok w górę, by dojść do  $A$ ). Liczba wszystkich szlaków od  $A' = (1,-1)$  do  $B$  jest równa  $|S_{u,d-1}| = \binom{u+d-1}{d-1}$ . Na mocy zasady odbicia taka sama jest liczba szlaków od  $A$  do  $B$  mających miejsca zerowe. Z tego wynika, że

$$(4) \quad |S_{u,d}^*| = \binom{u+d-1}{d} - \binom{u+d-1}{d-1},$$

co po prostych rachunkach daje tezę.  $\square$

Tu warto wspomnieć o liczbach Catalana. Można je definiować na wiele sposobów, między innymi za pomocą szlaków. Liczbę szlaków długości  $2n$ , rozpoczynających się i kończących na wysokości 0, bez punktów poniżej 0, oznaczamy przez  $C_n$ . Jeśli na początku takiego szlaku dołożymy krok w górę, otrzymamy szlak, który po wyjściu z punktu startowego nigdy nie wraca do jego poziomu, zatem  $C_n = |S_{n+1,n}^*|$ . Z twierdzenia Bertranda

$$C_n = |S_{n+1,n}^*| = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Wróćmy do dowodu tożsamości Cauchy'ego. Liczba wszystkich szlaków spełniających warunek (C2) jest na mocy (4) równa sumie

$$\sum_{k \geq 0} |S_{j+k+1, j-k}^*| = \sum_{k \geq 0} \left( \binom{2j}{j-k} - \binom{2j}{j-k-1} \right),$$

która, niczym teleskop, składa się do  $\binom{2j}{j}$ .

Pora na krótkie podsumowanie. Łączna liczba szlaków rozpoczynających się na wysokości 0 i kończących na dodatniej wysokości, mających długość  $2n+1$ , jest równa  $4^n$ . Liczba takich szlaków z przegrodą po  $2i$  krokach jest równa  $\binom{2i}{i} \binom{2j}{j}$ , więc  $4^n$  jest sumą takich liczb po całkowitych nieujemnych  $i, j$ , spełniających równość  $i+j=n$ . To kończy dowód tożsamości Cauchy'ego.

## 2. Iloczyn Wallisa

Ciąg iloczynów częściowych

$$(5) \quad W_n = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

jest rosnący, gdyż wszystkie czynniki są większe od 1.

Z analogicznej przyczyny ciąg

$$W'_n = \frac{2n+2}{2n+1} W_n = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdots \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}$$

jest malejący. Ponadto  $W'_n/W_n \rightarrow 1$  przy  $n \rightarrow \infty$ , więc te ciągi mają wspólną granicę  $W$  oraz

$$(6) \quad W_n < W < W'_n = \frac{2n+2}{2n+1} W_n.$$

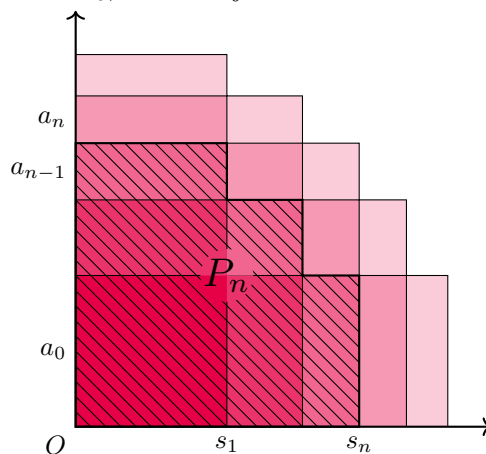
Wykorzystamy tożsamość Cauchy'ego do obliczenia granicy  $W$ . Dla liczb całkowitych nieujemnych  $n$  określamy

$$a_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Na mocy tożsamości Cauchy'ego ciąg  $(a)$  spełnia równanie

$$a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0 = 1.$$

Ma to ciekawą interpretację graficzną. Rozważmy pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych i umieścmy w niej kwadrat o boku  $a_0$  (warstwa nr 0). Obudujmy go dwoma prostokątami o wymiarach  $a_0 \times a_1$  i  $a_1 \times a_0$  (warstwa nr 1). Kontynuujemy z prostokątami  $a_0 \times a_2$ ,  $a_1 \times a_1$  i  $a_2 \times a_0$ , i tak dalej.



Niech  $P_n$  będzie wielokątem utworzonym z warstw od 0 do  $n-1$ . Skoro każda warstwa ma pole 1, to pole  $P_n$  jest równe  $n$ . Na pierwszy rzut oka im większe  $n$ , tym bardziej wielokąt  $P_n$  przypomina ćwiartkę koła o promieniu

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}.$$

Wykażemy, że to nie jest przypadek. Dla wygody przyjmijmy  $s_0 = 0$ , a wtedy:

**Lemat 1.** Dla  $n \geq 0$  zachodzi równość  $s_n = \frac{2n}{4^n} \binom{2n}{n}$ .

*Dowód.* Dla  $n = 0$  jest to oczywiste. Krok indukcyjny jest jednoliniowy:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + a_n = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n} = \\ &= \frac{2n+2}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Pora, by wkroczył do akcji iloczyn Wallisa. Mnożąc licznik i mianownik w iloczynie (5) przez  $2^{2n} (n!)^2$ , otrzymamy

$$(7) \quad W_n = \frac{4^{2n} (n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2} = \frac{4^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}^2},$$

więc z lematu 1 wynika, że  $s_n^2 W_n = \frac{4n^2}{2n+1}$ . Korzystając z nierówności (6), otrzymujemy

$$2n-1 < s_n^2 W_n < s_n^2 W < \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{4n^2}{2n+1} < 2n.$$

Nie licząc punktu  $O$ , wierzchołkami wielokąta  $P_n$  są punkty  $A_{i,j} := (s_i, s_j)$ , w których  $i+j = n$  lub  $i+j = n+1$ . Oczywiście  $|OA_{i,j}|^2 = s_i^2 + s_j^2$ . Na mocy powyższych nierówności mamy

$$\begin{aligned} \frac{2n-2}{W} &\leq \frac{2i-1}{W} + \frac{2j-1}{W} < |OA_{i,j}|^2 < \\ &< \frac{2i}{W} + \frac{2j}{W} \leq \frac{2n+2}{W}, \end{aligned}$$

więc wspomniane wierzchołki leżą między okręgami o wspólnym środku  $O$  i promieniach  $\sqrt{2(n \pm 1)/W}$ . Pole wielokąta  $P_n$  szacuje się zatem z góry i z dołu przez pola ćwiartek kół o takich promieniach. Przypomnijmy, że wielokąt  $P_n$  ma pole  $n$ , więc

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2(n-1)}{W} < n < \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2(n+1)}{W},$$

a po przekształceniu

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < W < \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Przechodząc z  $n$  do nieskończoności, otrzymujemy  $W = \pi/2$ .

### 3. Wzór Stirlinga

Dla  $n > 0$  określamy

$$f(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n.$$

W kolejnych lematy udowodnimy, że istnieje granica  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n!) - f(n))$ . W tym celu wprowadzamy funkcje pomocnicze

$$\begin{aligned} r(k) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1, \\ R(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} r(k). \end{aligned}$$

Dobór tych funkcji uzasadnia poniższy lemat.

**Lemat 2.** Zachodzi równość

$$1 - R(n) = \ln(n!) - f(n)$$

dla wszystkich całkowitych  $n \geq 1$ .

*Dowód.* Dla  $n = 1$  mamy równości  $1 - R(1) = 1 - 0 = 1$  oraz  $\ln(1!) - f(1) = 0 - \frac{1}{2} \ln 1 + 1 = 1$ . Indukcyjnie,

$$\begin{aligned} 1 - R(n+1) &= 1 - R(n) - r(n) = \\ &= \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = \\ &= \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) + n + 1 = \\ &= \ln((n+1)!) - \left(n+1 + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) + n + 1 = \\ &= \ln((n+1)!) - f(n+1), \end{aligned}$$

co kończy dowód.  $\square$

Aby pójść dalej, potrzebujemy dość dokładnego oszacowania wartości funkcji logarytmicznej.

**Lemat 3.** Dla każdego  $x \geq 0$  zachodzą nierówności

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

*Dowód.* Są one równościami, gdy  $x = 0$ , więc wystarczy udowodnić nierówności między pochodnymi

$$\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)' \leq (\ln(1+x))' \leq \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)',$$

równoważnie  $1-x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1-x+x^2$ . Ostatnie nierówności otrzymujemy z podzielenia oczywistych nierówności  $1-x^2 \leq 1 \leq 1+x^3$  przez  $1+x$ .  $\square$

**Lemat 4.** Istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)$ .

*Dowód.* Na mocy lematu 3:

$$\begin{aligned} r(k) &\geq \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) - 1 = -\frac{1}{4k^2}, \\ r(k) &\leq \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3}\right) - 1 = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3} \leq \\ &\leq \frac{1}{4k^2}. \end{aligned}$$

Szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  jest zbieżny, gdyż

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2.$$

Mamy  $|r(k)| \leq \frac{1}{4k^2}$ , więc na mocy kryterium porównawczego szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} |r(k)|$  jest zbieżny. To dowodzi zbieżności szeregu  $\sum_{k=1}^{\infty} r(k)$ , co jest równoważne tezie lematu.  $\square$

Z lematów 2 i 4 wynika, że istnieją również granice

$$\begin{aligned} g &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - R(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n!) - f(n)), \\ G &= e^g = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(n!) - f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ostatnia prosta! Granicę  $G$  obliczymy za pomocą iloczynu Wallisa, przy wykorzystaniu równości (7):

$$\begin{aligned} G &= \frac{G^2}{G} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}\right)^2}{\left(\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \sqrt{\frac{2}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n} (2n+1) W_n} = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

To kończy dowód wzoru Stirlinga.