Kubomino

*Piotr PIKUL**

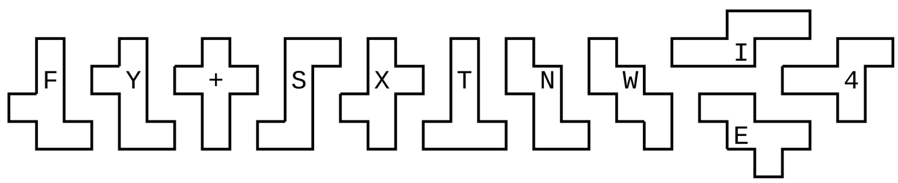
* Doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

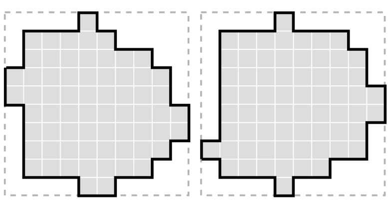
Miłośnicy matematyki rekreacyjnej zapewne zetknęli się z *pentominem*, czyli „puzzlami”, których każdy element składa się z pięciu stykających się bokami kwadratów. Mamy tam do dyspozycji 12 różnych części i próbujemy ułożyć z nich konkretne kształty (np. prostokąt 6×10, kwadrat o boku 8 bez pól narożnych albo jakieś mniej abstrakcyjne *zwierzątka*). Oczywiście ktoś spragniony większych wyzwań może przejść do *heksomin*, czyli kształtów złożonych z sześciu jednostkowych kwadratów każdy. Wtedy różnych dostępnych części jest już 35 i na dodatek nie można z takiego kompletu ułożyć żadnego prostokąta. Dowód tego faktu jest standardowy – jeśli heksomino położymy na szachownicy, to albo przykrywa ono tyle samo pól białych co czarnych, albo o dwa pola więcej jednego koloru niż drugiego. Heksomin tego drugiego rodzaju jest nieparzyście wiele, skąd wynika niemożność ułożenia prostokąta.

„Kwadrat bez pól narożnych” to przykład figury ułożonej ze wszystkich pentomin o najmniejszym możliwym obwodzie.

Wśród heksomin wyróżnia się jedenaście szczególnych – mianowicie siatki sześcianu. Poniżej można zobaczyć ich rodzinne zdjęcie.

W dzieciństwie „odkryłem” dziesięć różnych siatek sześcianu i dopiero kilka lat po tym „dokonaniu” dowiedziałem się, że to jednak nie były wszystkie...





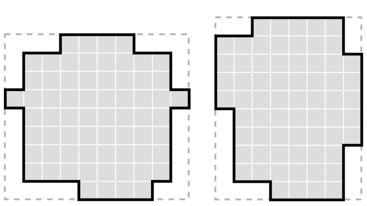
Przykładowe kształty o obwodzie 40 możliwe do ułożenia z kubomina

Pozwoliłem sobie nazwać łamigłówkę złożoną z siatek sześcianu *kubominem*, zapożyczając od pentomina konflikt pomiędzy nazwą pojedynczego elementu oraz całej układanki. Z kubomin też nie można zbudować prostokąta, co można uzasadnić, pracowicie rozważając wszystkie możliwości uzupełniania narożników prostokąta. Jaki jest w takim razie najbardziej *elegancki* kształt, który można z kubomin zbudować? Pytanie to nie jest szczególnie matematyczne. Łatwiej sformalizować kwestię *ciasnego upakowania* elementów. Można zauważyć, że minimalizacja obwodu ułożonej figury jest równoważna zwiększaniu łącznej długości styku pomiędzy częściami.

Czytelnik mógł spotkać się z twierdzeniem głoszącym, że minimalny obwód przy zadanym polu ma koło, no ale z kubomin go na pewno nie ułożymy. Można udowodnić, że obwód obszaru złożonego z 66 kwadratów jednostkowych wynosi co najmniej 34. Swoją drogą polecam samodzielne znalezienie wzoru na minimalny obwód obszaru o zadanej liczbie pól. Zwarty wzór jest może *dość specyficzny*, ale klasyfikacja wszystkich kształtów, które mogą realizować minimalny obwód, jest całkiem ciekawa. A jakby ktoś zechciał przyjrzeć się obszarom złożonym z trójkątnych pól (tzw. poliamondom), to tam dopiero się cuda dzieją! To jednak nie temat na dzisiaj...

W dalszej części artykułu Czytelnik może odnaleźć drobne wskazówki.
Kto domaga się jawnego wzoru, może wyznaczyć minimalny obwód dla małych wartości pola i z tymi danymi udać się na stronę `https://oeis.org`.

Gdy zacząłem się bawić kubominami i postawiłem pytanie o minimalny obwód, udało mi się znaleźć kilka konfiguracji o obwodzie 40. Później napisałem program poszukujący małego obwodu, któremu szybko udało się ułożyć kształt o obwodzie 38. Niedeterministyczny charakter komputerowych poszukiwań sprawiał, że przy każdym uruchomieniu znajdowane były inne rozwiązania, i w ten sposób dysponowałem rozrastającą się listą konfiguracji o obwodzie 38. Gdy ich liczba przekroczyła 300, za punkt honoru postawiłem sobie znalezienie choć jednego takiego ustawienia bez „krzemowego” wsparcia. Znalazłem dwa rozwiązania, z których żadne nie zostało wcześniej wygenerowane przez program. Gdy tak utwierdzałem się w przekonaniu, że obwód 38 jest najmniejszym możliwym, sprawdzałem, ile mierzą najdłuższe proste krawędzie lub jak wiele wierzchołków mają skatalogowane figury... nieoczekiwanie program „wypluł” jedno rozwiązanie o obwodzie 36. Tym samym poznałem ścisłą odpowiedź na pytanie o minimalny obwód, choć wcześniej uważałem, że zapewne nigdy to nie nastąpi.



Przykładowe kształty o obwodach 38 i 36

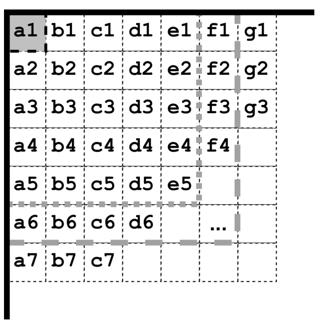
Czytelnik dotarłszy do tego miejsca, zapewne zastanawia się, czy może obwód 35 (a nawet 34?) też jest realny, i kontynuując eksperymenty, komputer w końcu na niego trafi? Otóż nie jest to możliwe. Po pierwsze wędrując wzdłuż obwodu, musimy tyle samo razy iść „na północ” co „na południe”, jak również tyle samo razy „na wschód” co „na zachód” – obwód musi być zatem liczbą parzystą, więc 35 odpada. Jeśli zaś chodzi o 34, to tutaj nie mogę nazwać znanego mi dowodu eleganckim i błyskotliwym (może Czytelnik znajdzie lepszy…?). Jego zaletą jest fakt, że daje się przeprowadzić „ręcznie”, co nie znaczy, że da się wszystkie szczegóły zmieścić w tym artykule.

„Doskonały dowód” korzystałby zapewne z jakichś specyficznych własności siatek sześcianu.

Kształtów o obwodzie 34 i polu 66 jest 182 (zob. ciąg A100092 na OEIS), ale na szczęście nie musimy wszystkich z osobna rozważać. Najpierw zauważmy, że każdy taki kształt (oznaczmy go przez F) musi być „wypukły”, czyli wszystkie wiersze i kolumny muszą być w jednym kawałku (jest to standardowa definicja wypukłości poliomin). Tak rozumiana wypukłość jest równoważna temu, że obwód F jest równy obwodowi najmniejszego ograniczającego prostokąta (dlaczego?). Gdyby nasz kształt nie był wypukły, to „sprasowując go” do czegoś wypukłego (wyobraźmy sobie, że nagle wszystkie pola tworzące F opadają na dno ograniczającego prostokąta, a potem jeszcze spychamy je np. na prawo), otrzymamy kształt o mniejszym obwodzie, a 34 jest minimalnym obwodem dla pola 66.

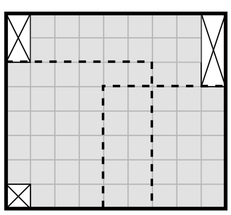
Każde pojedyncze kubomino jest wypukłym poliominem, choć żadne nie jest wypukłym podzbiorem płaszczyzny.

Z wypukłości wyciągamy wniosek, że ograniczający prostokąt też ma obwód 34, a kandydatów o dostatecznie dużym polu jest tylko trzech. Największy z nich ma pole $8 \cdot 9 = 72$, czyli odrzucamy co najwyżej sześć pól. Ponadto, aby zachować minimalność obwodu (wypukłość), odrzucone pola muszą tworzyć spójne obszary przylegające do wierzchołków prostokąta (oczywiście od wewnątrz). Ponieważ maksymalnie 6 odrzuconych pól musimy podzielić pomiędzy 4 narożne obszary, otrzymujemy, że ograniczający prostokąt ma wierzchołek, z którego nic nie usunięto, albo taki, którego pozbawiono tylko jednego, narożnego pola (`a1` na rysunku).

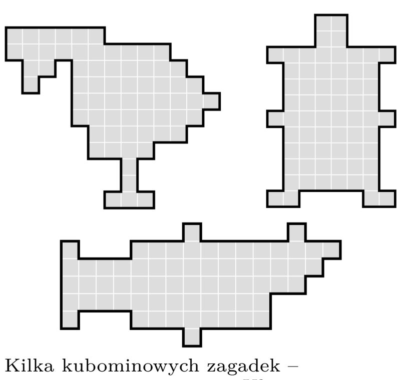


Poglądowy rysunek wierzchołka prostokąta ograniczającego

Teraz przychodzi kolej na nieco żmudne, systematyczne przeanalizowanie możliwych pokryć naroża kubominami. Przykładowo, jeśli pole `a1` (patrz rysunek na marginesie) spróbujemy przykryć kubominem „T”, to nie będzie już możliwe pokrycie pola `a2` (lub `b1`, jeśli „T” ustawiliśmy poziomo). Z kolei gdy pokryjemy `a1` elementem „4”, to okaże się, że choć teoretycznie pola `a3` i `b1` można pokryć, to oba wymagają użycia elementu „I”, który jest tylko jeden. Nie wszystkie przypadki są aż tak proste, a gdy rozważamy naroże z usuniętym polem `a1` („wyszczerbione”), możliwości robi się nieco więcej (np. trzeba wtedy rozważyć umieszczenie części „+” w rogu). Ważne, że wszystkie próby wypełnienia naroża okazują się płonne, jeśli chcemy pokryć cały kwadrat 6×6 (lub wyszczerbiony 7×7). Co istotne, w całej tej analizie nie trzeba brać pod uwagę położenia pozostałych wierzchołków figury F, ani nawet wymiarów prostokąta ograniczającego – można ją traktować jak nieograniczoną.


Przykładowy kształt o polu 66 i obwodzie 34 (nie można go ułożyć z kubomin). W przypadku prostokąta ograniczającego 8×9 potrzeba przynajmniej trzech usuniętych pól przy krótszym boku, aby nie wystąpiło *duże naroże*, choć i tak wystąpi wtedy *małe*. Pozostałe trzy pola nie wystarczą, aby wykluczyć *małe naroże* przy przeciwległym boku

Niestety może tak być, że kształt o obwodzie 34 nie zawiera jako naroża ani całego kwadratu 6×6, ani wyszczerbionego 7×7. Można pokazać (rozważając kilka prostych przypadków, jeden z nich zilustrowany jest na marginesie), że w takiej sytuacji występują co najmniej dwie wersje o jeden mniejsze: kwadrat 5×5 lub wyszczerbiony kwadrat 6×6. Okazuje się ponadto (dzięki wspomnianej skrupulatnej analizie sposobów pokrywania naroży), że jedynie wykorzystanie kubomina „E” (do pokrycia pola `a2`/`b1`) daje jakiekolwiek szanse na pokrycie każdej z nich z osobna! Skoro część „E” jest tylko jedna, pokrycie całego obszaru nie jest możliwe, *quod erat demonstrandum*.


Kilka kubominowych zagadek – rozwiązanie na stronie 4. Ułożenie z kubomina kształtu posiadającego oś symetrii nie jest łatwe. Więcej zagadek w załączniku do elektronicznej wersji artykułu na stronie `deltami.edu.pl`

Kto po lekturze powyższej idei dowodu nabrał niechęci do problemu minimalnego obwodu, może na pocieszenie spróbować rozwiązać go w prostszych przypadkach kompletu tromin (dwie części po 3 kwadraty) i tetromin (5 części po 4 kwadraty). Tam argumenty są już elegantsze, choć od dawna znane. Dla kompletu starych dobrych pentomin rozwiązanie jest „mało ciekawe” – realizują one swój teoretycznie minimalny obwód równy 32. To czyni je jednak bardzo wyjątkowymi, ponieważ wszystkie heksomina, przy polu wynoszącym 210, nie są w stanie osiągnąć obwodu 58, gdyż jedyny kształt o takich parametrach to „nieukładalny” prostokąt 14×15. Z kolei dla rodzin jeszcze większych poliomin ($\geqslant$ 7-omino) uzyskanie teoretycznie minimalnego obwodu jest już zupełnie poza zasięgiem, ponieważ znajdują się wśród nich części z dziurami, które uniemożliwiają zbudowanie kształtu wypukłego. Zamiast głośno mówić, że dokładne wartości nie są mi znane, powiem tylko, że ciąg 4, 6, 12, 20, 32, 60 czeka na kolejne wyrazy.

Ze wszystkich heksomin można uzyskać obwód 60, ale margines jest zbyt wąski, aby to pomieścić.

W przypadku kubomina (i nie tylko) poza poszukiwaniem minimalnego obwodu można próbować ustanowić inne „rekordy”. Na przykład: Dla jak dużego n prostokąt $1 \times n$ można przykryć kompletem kubomin? Co się stanie, jeśli dodatkowo zażądamy, aby ułożona figura była wypukła? Jaka jest najdłuższa możliwa prosta krawędź ułożonej figury (znów: przy założeniu wypukłości lub bez niego)? Ile wynosi minimalna liczba wierzchołków? Jaka najmniejsza figura (poliomino) pomieści każde kubomino?

Na deser można sobie oczywiście poukładać też rybki, domki i ptaszki... Ciekawym wyzwaniem jest ułożenie kształtu symetrycznego. Po wielu sesjach uruchomień programu układającego lista rozwiązań o obwodzie 38 liczy ponad 2600 pozycji. Wśród nich jest zaledwie 1 posiadający oś symetrii oraz 4 symetryczne środkowo. Kilka symetrycznych kształtów (o znacznie większym obwodzie) udało mi się też ułożyć osobiście.

Jeśli chodzi o układy o obwodzie 36, programowi udało się znaleźć tylko 4 egzemplarze, przy czym dwa z nich można lekko zmodyfikować, nie zmieniając obwodu.

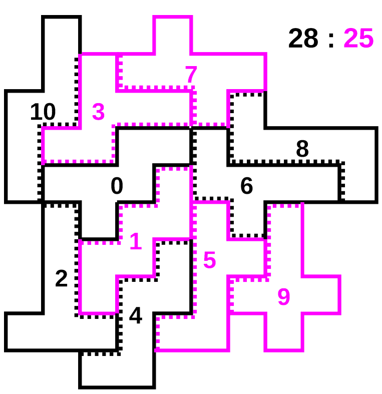
Tyle możliwości, a to tylko „standardowe” układanki!

Pomiędzy kartami a obwodem kubomina

Rozważania na temat minimalnego obwodu i pisanie związanych z tym programów doprowadziło także do pojawienia się koncepcji wieloosobowej gry. Choć liczba różnego rodzaju gier, w których poliomina odgrywają mniej lub bardziej znaczącą rolę, jest całkiem pokaźna, to wydaje się, że pomysł, który zamierzam tu przedstawić, nie był wcześniej rozważany.

Nie zdziwię się, jeśli Znawcy Gier (Nie Tylko) Planszowych wskażą jakiś zapomniany (?) projekt przypominający opisany w tym artykule.

Kubomino nie jest niezbędne dla opisanej dalej rozgrywki. Można je zastąpić innym zestawem poliomin. Być może da się wskazać jakiś „lepszy” – cokolwiek to znaczy. Dobór zestawu (zwłaszcza jego liczności) – co stanie się jasne po dalszej lekturze – jest uzależniony także od liczby graczy.



Przykładowa rozgrywka dwóch graczy używających losowo rozdanych kubomin

Podstawowa idea jest prosta. Gracze kolejno dokładają poliomina do już istniejącej figury (chyba że mowa o ruchu początkowym). Za każdy ruch otrzymuje się tyle punktów, ile wyłożony element ma wspólnych (jednostkowych) krawędzi z ustawionymi poprzednio. Gdy kształty się wyczerpią, podliczamy punkty i wygrywa gracz, który zdobył ich najwięcej.

Ponieważ wyłożenie pierwszego elementu jest warte 0 punktów, należy je traktować jako ruch dodatkowy. Wydaje się, że wszyscy gracze powinni dysponować jednakową liczbą ruchów punktowanych, czyli liczba używanych części powinna dawać resztę 1 przy dzieleniu przez liczbę graczy. Można również ustalić, że każdy gracz ma do dyspozycji te same elementy, czyli używać zwielokrotnionego zestawu poliomin.

Tasowanie poliomin może być niewygodnym rozwiązaniem. Można zastosować metodę pośrednią, wykorzystującą na potrzeby tasowania/losowania karty z rysunkami, a *prawdziwych* poliomin można używać dopiero przy wykonywaniu ruchu. Albo ruchy wykonywać, dorysowując kolejne kształty – jak ktoś nie lubi wycinanek. Idąc dalej, można zastąpić rysowanie układaniem zapałek. Wtedy w roli punktów mogą wystąpić niewykorzystane zapałki.

Powyższe podstawy rozgrywki nadal dopuszczają mnóstwo wariantów. Gracze mogą mieć ustalone na początku (np. na drodze tasowania i rozdawania) komplety figur, z których mogą dowolnie wybierać część wykładaną w konkretnym ruchu. Można też z góry ustalić kolejność wykładania klocków (wtedy gracze nie potrzebują oddzielnych kompletów) albo za każdym razem wybierać następny element drogą losowania. W takim oceanie możliwości na pewno każdy znajdzie coś dla siebie!

Jeśli ktoś potrzebuje dla tej gry jakiejś bajeczki („fabuły”), to można mówić o grodzeniu działek (lub rozstawianiu parawanów na plaży). Każdy chce do tego wykorzystać jak najmniej osobiście zbudowanego płotu. Skąd biorą się tak dziwne kształty grodzonego terenu? Tu już trzeba dodatkowej inwencji. Być może hodujemy owce o wyjątkowo matematycznym usposobieniu, które wędrując po siatce sześcianu, czują, że mają więcej *przestrzeni*? Jeśli do gry użyjemy innych kształtów niż kubomino, to sprawa się komplikuje... Czytelnik chcący dalej rozwijać tę opowieść robi to na własne ryzyko.