Klub 44 F

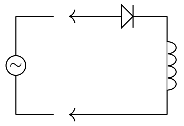
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2022

Przypominamy treść zadań:

736. Cewkę o indukcyjności L połączoną szeregowo z idealną diodą podłączono w chwili t_0 do źródła napięcia przemiennego $u = U\sin\omega t$ (rys. 1). Znaleźć natężenie prądu w cewce w funkcji czasu. Opory omowe zaniedbujemy.

737. Lodówka utrzymuje w zamrażalniku stałą temperaturę $-12°$C. Gdy temperatura w pokoju wynosi $25°$C, silnik włącza się co 8 minut, pracuje 5 minut, po czym następuje pauza. Jak często i na jak długo będzie włączać się lodówka, gdy temperatura w pokoju obniży się do $15°$C? Przy jakiej maksymalnej temperaturze w pokoju lodówka może utrzymać w zamrażalniku zadaną temperaturę? Zakładamy, że lodówka jest idealną maszyną cieplną.



Rys. 1

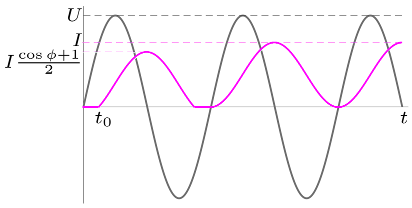
736. Jeżeli w chwili podłączenia do źródła napięcie jest ujemne, czyli włączone w kierunku zaporowym dla diody, prąd nie popłynie aż do chwili, gdy napięcie zmieni znak.

Rozważmy więc przypadek, gdy w chwili podłączenia napięcie źródła jest nieujemne i wynosi $U\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi = \omega t_0 \leqslant \pi$. Równanie Kirchhoffa dla naszego obwodu ma postać $U\sin\omega t = L di/dt$, a jego rozwiązanie

(1) $$i = -U\cos\omega t/(L\omega) + \text{const}.$$

Stałą wyznaczamy z warunku początkowego $\omega t_0 = \varphi$ oraz $i = 0$ i otrzymujemy

(2) $$i = U(\cos\varphi - \cos\omega t)/(L\omega).$$



Rys. 2

Natężenie prądu rośnie do chwili , gdy $\omega t = \pi$ i napięcie źródła spada do zera. Mimo zmiany znaku źródła napięcia prąd w obwodzie nadal płynie kosztem energii pola magnetycznego zmagazynowanej w cewce. Jego natężenie maleje do zera, gdy $\omega t = 2\pi - \varphi$. Prąd przestaje płynąć aż do momentu, gdy rosnące napięcie źródła ponownie osiąga wartość zero. Wtedy $\omega t = 2\pi$, a równanie (2) ma postać

(3) $$i = U(1 - \cos\omega t)/(L\omega).$$

Odtąd dioda cały czas pozostaje otwarta, a natężenie prądu zmienia się od zera do $2U/L\omega$, co ilustruje rysunek 2.

737. Wprowadźmy oznaczenia: T_1– początkowa temperatura w pokoju w skali bezwzględnej, T_2 – ustalona temperatura zamrażalnika, $\tau_1 = 5$ min – czas pracy silnika w jednym cyklu, $\tau_2 = 3$ min – czas trwania pauzy, W– praca wykonana przez silnik w jednym cyklu, Q_2 – ciepło pobrane z zamrażalnika w czasie pracy silnika.

Ponieważ zakładamy, że mamy do czynienia z idealną maszyną chłodzącą, zachodzi związek

$$W/Q_2 = \Delta T/T_2, \quad \text{gdzie } \Delta T = T_1 - T_2,$$

stąd

(1) $$T_2 = Q_2 \Delta T/W.$$

Temperatura zamrażalnika nie zmienia się, więc ciepło pobrane z zamrażalnika w wyniku pracy silnika równe jest ciepłu dostarczonemu do zamrażalnika i jest proporcjonalne do czasu trwania cyklu i różnicy temperatur $Q_2 \sim (\tau_1 + \tau_2)\,\Delta T$, natomiast praca wykonana przez silnik $W \sim \tau_1$. Podstawiając to do równania (1), otrzymujemy

$$T_2 \sim (\tau_1 + \tau_2)\,(\Delta T)^2/\tau_1.$$

Oznaczając przez $\tau_1{}'$ i $\tau_2{}'$ czasy pracy silnika i pauzy po obniżeniu temperatury pokoju do $T_1{}'$, możemy napisać

(2) $$(\tau_1 + \tau_2)\,(\Delta T)^2/\tau_1 = (\tau_1{}' + \tau_2{}')\,(\Delta T')^2/\tau_1{}', \quad \text{gdzie} \Delta T' = T_1{}' - T_2.$$

Gdy silnik nie pracuje, szybkość przepływu ciepła z pokoju do zamrażalnika jest proporcjonalna do różnicy temperatur, stąd

(3) $$\tau_2 \Delta T = \tau_2{}' \Delta T'.$$

Z równań (2) i (3) otrzymujemy: $\tau_1{}' = 2$ min, $\tau_2{}' = 4{,}1$ min. Maksymalną możliwą temperaturę w pokoju znajdujemy z warunku $\tau_2{}'' = 0$ (silnik pracuje cały czas).

$$\Delta T_{\max} = \Delta T\sqrt{8/5} = 45{,}8 \text{ K}, \qquad t_{\max} = 34{,}8°\text{C}.$$

Rozwiązanie zadania M 1719.
Pokażemy indukcyjnie, jak ustawić liczby naturalne w nieskończony ciąg tak, aby każda suma co najmniej dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu nie była liczbą pierwszą.

Weźmy $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Załóżmy, że skończony ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 1)$ spełniający postulowany warunek został już skonstruowany, i niech m będzie najmniejszą liczbą naturalną, która nie jest wyrazem tego ciągu.

Wprowadźmy oznaczenie

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + m$$

i niech $a_{n+1} = S!$ oraz $a_{n+2} = m$. Ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2}$ również spełnia żądany warunek. Rzeczywiście każda suma zawierająca wyraz a_{n+1} jest równa $S! + k$, dla pewnego $1 < k \leqslant S$, i nie jest liczbą pierwszą, ponieważ jest podzielna przez k.

Kontynuując tę konstrukcję, otrzymujemy ciąg nieskończony spełniający założenie indukcyjne. Z konstrukcji wynika również, że każda liczba naturalna pojawia się w tym ciągu dokładnie raz.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 730 ($WT = 2{,}4$), 731 ($WT = 2{,}25$) 732 ($WT = 1{,}64$) i 733 ($WT = 3{,}06$) z numerów 1, 2/2022

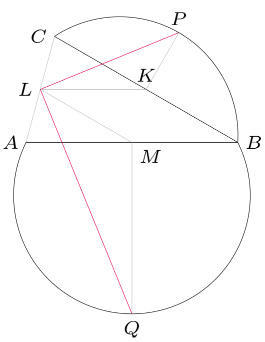
Ryszard Baniewicz	Włocławek	43,64
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Tomasz Wietecha	Tarnów	15 – 41,05
Sławomir Buć	Mystków	39,50
Piotr Adamczyk	Warszawa	1 – 36,96
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2 – 29,78

Klub 44 M

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 833 ($WT = 3{,}29$) i 834 ($WT = 1{,}24$) z numeru 1/2022

Witold Bednarek	Łódź	42,13
Kacper Morawski	Warszawa	42,07
Andrzej Kurach	Ryjewo	41,81
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Marek Spychała	Warszawa	38,66
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Michał Adamaszek	Kopenhaga	33,29
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34

Rozwiązanie zadania M 1717.



Niech P i Q oznaczają środki łuków odcinków kołowych odpowiednio BC i AC. Niech K, L i M będą środkami odcinków odpowiednio BC, CA i AB. Wtedy z twierdzenia o linii środkowej w trójkącie mamy

$$\sphericalangle PKL = 90^\circ + \sphericalangle CKL = 90^\circ + \sphericalangle CBA = 90^\circ + \sphericalangle LMA = \sphericalangle LMQ.$$

Ponadto również

$$LK = \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}BC = LM.$$

Z równości

$$\sphericalangle KPB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle CPB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BQA) = \sphericalangle MBQ$$

wynika, że trójkąty prostokątne BKP oraz QMB są podobne, więc $\frac{KP}{MB} = \frac{KB}{MQ}$. Wobec tego

$$\frac{KP}{KL} = \frac{KP}{MB} = \frac{KB}{MQ} = \frac{ML}{MQ}.$$

Łącząc powyższą równość z równością kątów PKL i LMQ, wnioskujemy, że trójkąty PKL i LMQ są podobne. W szczególności $\sphericalangle QLM = \sphericalangle LPK$. Zatem

$$\sphericalangle QLP = \sphericalangle QLM + \sphericalangle MLK + \sphericalangle KLP = \sphericalangle QLM + \sphericalangle LMA + \sphericalangle MQL = 90^\circ.$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2022

Przypominamy treść zadań:

839. Funkcja f (zmiennej rzeczywistej) nazywa się *wypukła* w przedziale J, gdy dla każdej pary punktów $x, y \in J$ oraz dla każdej pary liczb $p, q \geqslant 0$, których suma wynosi 1, zachodzi nierówność $f(px + qy) \leqslant pf(x) + qf(y)$.

Niech będą dane funkcje $f, F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ związane zależnością $F(x) = xf(1/x)$. Udowodnić, że w przedziale $(0,\infty)$ funkcja F jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest wypukła.

840. Dane są liczby naturalne $n, k > 1$. Niech $M = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}$.
(**a**) Dowieść, że jeśli $M \equiv 1 \pmod{n}$, to $k^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}$.
(**b**) Wyjaśnić, czy zachodzi implikacja odwrotna (do podanej w części (**a**)).

839. W równaniu wiążącym funkcje f i F podstawiamy $x = 1/z$; otrzymujemy $f(z) = zF(1/z)$. To pokazuje, że zależność f od F wyraża się tym samym wzorem, co zależność F od f. Stąd wniosek, że dla dowodu równoważności (z tezy zadania) wystarczy wykazać wynikanie w jedną stronę: że z wypukłości f wynika wypukłość F; czyli że z własności

(1) $\qquad f(px+qy) \leqslant pf(x) + qf(y) \quad$ dla $\ x, y > 0;\ \ p, q \geqslant 0;\ \ p + q = 1$

wynika analogiczna własność

(2) $\quad F(PX+QY) \leqslant PF(X) + QF(Y) \quad$ dla $\ X, Y > 0;\ \ P, Q \geqslant 0;\ \ P + Q = 1.$

Przyjmijmy więc założenie (1); weźmy dowolne liczby $X, Y > 0$, $P, Q \geqslant 0$ takie, że $P + Q = 1$, i podstawmy w (1):

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y}, \quad p = \frac{PX}{PX+QY}, \quad q = \frac{QY}{PX+QY}$$

(więc $p + q = 1$). Wychodzi

$$f\left(\frac{P}{PX+QY} + \frac{Q}{PX+QY}\right) \leqslant \frac{PX}{PX+QY} f\left(\frac{1}{X}\right) + \frac{QY}{PX+QY} f\left(\frac{1}{Y}\right),$$

co (wobec równości $P + Q = 1$) przepisujemy w postaci

$$(PX+QY) f\left(\frac{1}{PX+QY}\right) \leqslant PX \cdot f\left(\frac{1}{X}\right) + QY \cdot f\left(\frac{1}{Y}\right).$$

A ponieważ $tf(1/t) = F(t)$, jest to dokładnie nierówność (2), którą chcieliśmy udowodnić.

840. Przedmiotem rozważań są warunki:

(3) $$M \equiv 1 \pmod{n}$$

oraz

(4) $$k^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Nie zakładając spełnienia któregokolwiek z nich, zauważamy, że dla dowolnych liczb naturalnych $n, k > 1$ oraz dla liczby M (określonej w zadaniu) zachodzi równość $(k-1)M = k^n - 1$, wobec czego $k^n \equiv 1 \pmod{M}$. Dzielimy $M - 1$ przez n (z resztą); czyli piszemy

(5) $$M - 1 = qn + r \qquad (0 \leqslant r < n).$$

Zatem

(6) $$k^{M-1} = k^{qn}k^r \equiv k^r \pmod{M}.$$

I teraz:

(**a**) Jeżeli spełniony jest warunek (3), to $r = 0$, więc dowodzona zależność (4) wynika wprost ze związku (6).

(**b**) Odpowiedź *tak*; bowiem jeśli spełniony jest warunek (4), to (zgodnie z (6))

(7) $$k^r \equiv 1 \pmod{M}.$$

Liczba k^r jest jednym ze składników sumy definiującej M, więc $1 \leqslant k^r < M$, co (wobec (7)) oznacza, że $k^r = 1$. Tak więc $r = 0$ i z równości (5) wynika (3).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.