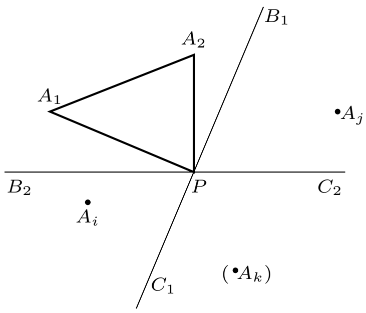
Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 831 ($WT = 2{,}52$) i 832 ($WT = 2{,}24$) z numeru 12/2021

Witold Bednarek	Łódź	41,13
Kacper Morawski	Warszawa	40,83
Andrzej Kurach	Ryjewo	40,81
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Marek Spychała	Warszawa	34,25
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2022

Przypominamy treść zadań:

837. Wewnątrz wypukłego n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że każdy z trójkątów PA_iA_j jest równoramienny ($1 \leqslant i < j \leqslant n$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P?

838. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych x, y, z większych od 1, spełniających równanie

$$x^4 + y^4 = z^2 + 1.$$

837. Odpowiedź: tak. Przypuśćmy bowiem, że np. $PA_1 \neq PA_2$. Odcinek A_1A_2 jest wtedy jednym z bocznych ramion trójkąta równoramiennego PA_1A_2, wobec czego kąt A_1PA_2 jest ostry. Przez punkt P prowadzimy prostą B_1C_1, prostopadłą do PA_1, oraz prostą B_2C_2, prostopadłą do PA_2; punkty B_i, C_i wybieramy na tych prostych tak, by kąty A_2PB_1, A_1PB_2 były ostre, a kąty A_2PC_1, A_1PC_2 rozwarte (wówczas także kąty B_1PC_2, B_2PC_1 są ostre, a B_1PB_2, C_1PC_2 rozwarte).

Gdyby w obszarze kąta wypukłego C_1PC_2 (branego z brzegiem) leżał jakiś wierzchołek A_k, kąty A_1PA_k, A_2PA_k byłyby rozwarte (lub proste); równoramienne trójkąty A_1PA_k, A_2PA_k musiałyby mieć równe ramiona PA_1, PA_k, PA_2, wbrew przyjętemu założeniu. Tak więc w tym obszarze nie ma wierzchołków badanego wielokąta.

Skoro P jest punktem wewnętrznym tego wielokąta, a w sektorze C_1PC_2 nie ma wierzchołków, zatem wewnątrz kąta wypukłego B_2PC_1 musi leżeć jakiś wierzchołek A_i. Podobnie, wewnątrz kąta wypukłego B_1PC_2 musi leżeć jakiś wierzchołek A_j. W każdym z trójkątów równoramiennych A_2PA_i, A_iPA_j, A_jPA_1 kąt przy wierzchołku P jest nieostry, skąd wniosek, że odcinki PA_2, PA_i, PA_j, PA_1 są równymi ramionami tych trójkątów. To ostatecznie obala przypuszczenie, że $PA_1 \neq PA_2$, i uzasadnia odpowiedź „tak” na postawione w zadaniu pytanie.

838. Kluczem do podanej niżej konstrukcji jest trójka pitagorejska $(8, 15, 17)$. Określamy nieskończone rosnące ciągi liczb naturalnych (x_n), (y_n) wzorem rekurencyjnym:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 11x_n + 15y_n \\ y_{n+1} = 8x_n + 11y_n \end{cases} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Łatwo sprawdzić, że $8x_{n+1}^2 - 15y_{n+1}^2 = 8x_n^2 - 15y_n^2$; a skoro $8x_0^2 - 15y_0^2 = 17$, zatem

$$(2)\qquad 8x_n^2 - 15y_n^2 = 17 \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Stąd dalej wynika, że

$$(3)\qquad \frac{17x_n^2 - 8}{15} = \frac{17y_n^2 + 15}{8} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(wystarczy wymnożyć „na krzyż” te ułamki i skorzystać z równości (2)).
Z określenia (1) widać, że $y_{n+1}^2 \equiv y_n^2 \pmod 8$; stąd $y_n^2 \equiv 1 \pmod 8$ dla wszystkich $n \geqslant 0$, dzięki czemu

$$17y_n^2 + 15 \equiv 0 \pmod 8 \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

To pokazuje, że wspólna wartość wyrażeń (3) jest (dla każdego n) liczbą całkowitą. Oznaczmy ją z_n. Wówczas

$$z_n^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2 z_n^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 z_n^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2 \left(\frac{17x_n^2 - 8}{15}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 \left(\frac{17y_n^2 + 15}{8}\right)^2 =$$
$$= \left(x_n^2 - \frac{8}{17}\right)^2 + \left(y_n^2 + \frac{15}{17}\right)^2 = x_n^4 + y_n^4 - \frac{2(8x_n^2 - 15y_n^2)}{17} + 1,$$

co wobec równości (2) oznacza, że $z_n^2 = x_n^4 + y_n^4 - 1$. Każda trójka (x_n, y_n, z_n) jest więc rozwiązaniem badanego równania diofantycznego.

Uwaga. Tę serię rozwiązań wskazał Witold Bednarek, autor zadania. Istnieje wszelako bardzo wiele innych rozwiązań. Podobną serię można wygenerować na przykład przez rekurencję liniową $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, $x_{n+1} = 19x_n + 40y_n$, $y_{n+1} = 9x_n + 19y_n$ (tu kluczem jest trójka pitagorejska $(9, 40, 41)$); początkowe wyrazy ciągu $(x_n^4 + y_n^4 - 1)$ to $9^2, 9644^2, \ldots$; i wszystkie dalsze też są kwadratami; aby się o tym upewnić, warto wyrazić liczby $z_n = \sqrt{x_n^4 + y_n^4 - 1}$ wzorami analogicznymi do (3). Zachęcamy do znalezienia jeszcze innych (podobnych) serii – np. takiej, w której znalazłoby się rozwiązanie $x = y = 13$; lub też – co ciekawsze – do rozpoznania ogólniejszego schematu, który kryje się za tymi przykładami.

Rozwiązanie zadania M 1715.
Niech K będzie punktem przecięcia odcinków AE i BF. Wtedy

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle AFB + \sphericalangle FAE = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle AEC.$$

Oznacza to, że $BF \parallel CE$.

Rozwiązanie zadania M 1716.
Ponieważ

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b(b+1)},$$

po przeniesieniu prawej strony na lewą stronę dostajemy do pokazania następującą nierówność:

$$\frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant 0.$$

Możemy założyć, że x jest największą z trzech podanych liczb. Możliwe są dwa przypadki.
1) $y \geqslant z$. Wtedy

$$\frac{x-y}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-y}{y(y+1)}, \quad \frac{y-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)} - \frac{z-y}{z(z+1)}.$$

2) $y < z$. Wtedy

$$\frac{z-y}{z(z+1)} \leqslant \frac{z-y}{y(y+1)}, \quad \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)}.$$

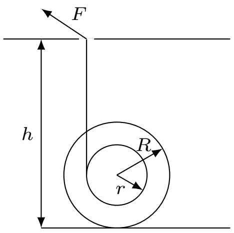
Klub 44 F

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2022

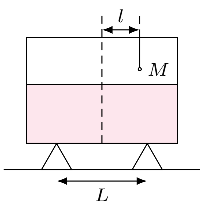
Przypominamy treść zadań:

734. Na poziomym stole leży szpulka, na którą nawinięta jest cienka, nieważka, gładka nić. Promień zewnętrzny szpulki wynosi R, wewnętrzny r. Koniec nici przeciągnięty jest przez niewielki otwór znajdujący się na wysokości h nad powierzchnią stołu. W chwili początkowej szpulka jest nieruchoma, a nić pionowa (rys. 1). Koniec nici zaczynamy ciągnąć stałą siłą F i szpulka toczy się po stole bez poślizgu. Znaleźć maksymalną prędkość szpulki. Masa szpulki wynosi M. Należy przyjąć, że połowa tej masy skupiona jest na osi szpulki, a druga połowa rozłożona równomiernie na obwodzie zewnętrznym o promieniu R.



Rys. 1

735. Prostopadłościenne naczynie z wodą stoi na dwóch podporach symetrycznych względem osi naczynia i odległych od siebie o L. Nad wodą, na poprzeczce łączącej krawędzie naczynia, wisi na nici kawałek ołowiu o masie M, w odległości l od osi naczynia (rys. 2). Siły reakcji podpór wynoszą R_1 i R_2, odpowiednio dla lewej i prawej podpory. Jakie będą te siły reakcji, gdy nić wydłużymy i ołów zanurzy się w wodzie? Gęstość ołowiu jest n razy większa od gęstości wody.



Rys. 2

734. Po przyłożeniu siły F szpulka zaczyna toczyć się w prawo. Siła naciągu nici N, równa co do wartości sile F, jest jedyną siłą działającą na szpulkę, która ma niezerowy moment względem punktu podparcia. Powoduje on wzrost prędkości kątowej względem chwilowej osi obrotu aż do chwili, gdy przedłużenie nici przechodzi przez punkt podparcia i ramię siły N jest równoległe do tej siły (rys. 3). Potem moment siły zmienia zwrot na przeciwny, szpulka zwalnia, a po zatrzymaniu zaczyna toczyć się w drugą stronę.

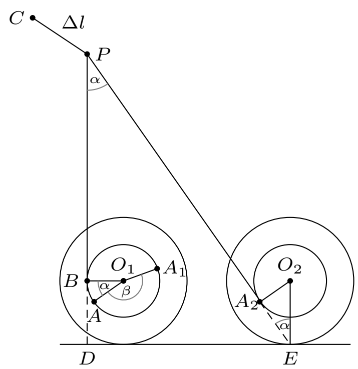
Siła F jest jedyną siłą zewnętrzną wykonującą pracę nad układem, zatem zmiana energii kinetycznej szpulki równa jest pracy tej siły:

(1) $$F\Delta l = Mv^2/2 + Mv^2/4 = 3Mv^2/4,$$

gdzie v jest szukaną prędkością maksymalną,

(2) $$\Delta l = |PC| = |PB| - |PA_2| + s$$

długością nici wyciągniętej przez szczelinę, a s to długość nici odwiniętej ze szpulki. Zachodzą związki : $|PB| = h - R$, $|PA_2| = h/\cos\alpha - R\cos\alpha$.



Rys. 3

Aby znaleźć s, oznaczmy przez A_1 położenie w chwili początkowej punktu nici, który w chwili końcowej jest styczny do szpulki w punkcie A_2. Ponieważ szpulka toczy się bez poślizgu, droga $|O_1O_2| = |BO_2| - r = h\,\mathrm{tg}\,\alpha - r$ przebyta przez środek szpulki równa jest długości łuku zakreślonego w tym czasie przez punkt na obwodzie szpulki: $|O_1O_2| = \beta R$, gdzie $\beta = \sphericalangle A_1O_1A$.

Długość łuku, jaki zatoczył wyróżniony punkt nici, wynosi $s_1 = \beta r$, a długość nici odwiniętej ze szpulki $s = s_1 + \alpha r$. Podstawiając to do wzoru (2), otrzymujemy

(3) $$\Delta l = h - R - (h/\cos\alpha - R\cos\alpha) + r\,(h\,\mathrm{tg}\,\alpha - r)/R + \alpha r.$$

Wyrażając wszystkie funkcje kąta α we wzorze (3) przez $\sin\alpha = r/R$ i podstawiając do (1), otrzymujemy maksymalną wartość prędkości szpulki:

$$v = \sqrt{4F\left[r\arcsin(r/R) - r^2/R + (h-R)\left(1-\sqrt{1-(r/R)^2}\right)\right]/3M}.$$

735. Gdy ciężarek zanurzy się w wodzie, siła naciągu nici zmaleje o wielkość równą sile wyporu $F_A = Mg/n$, a tym samym zmaleje siła nacisku poprzeczki na krawędzie naczynia. Jednocześnie podniesie się poziom wody w naczyniu i jej parcie na dno wzrośnie o taką samą wartość F_A, bo siły zewnętrzne działające na układ nie zmieniają się. Suma sił reakcji podpór pozostanie niezmieniona:

$$R_1 + R_2 = R_1' + R_2'.$$

Jeżeli siła reakcji lewej podpory wzrośnie o wartość f, to prawej zmaleje o taką samą wartość. Wypadkowy moment dodatkowych sił wewnętrznych musi być równy zeru, stąd

$$2fL/2 = F_A l, \qquad f = Mgl/(nL).$$

Szukane siły reakcji wynoszą:

$$R_1' = R_1 + Mgl/(nL), \qquad R_2' = R_2 - Mgl/(nL).$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 728 ($WT = 3{,}23$) i 729 ($WT = 1{,}5$) z numeru 12/2021

Konrad Kapcia	Poznań	2 – 3,24
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Ryszard Baniewicz	Włocławek	38,63
Sławomir Buć	Mystków	38,53
Tomasz Wietecha	Tarnów	15 – 38,49
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.