

Princeps Mathematicorum

Jarosław GÓRNICKI*

* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

[1] J.J. Gray, *A commentary on Gauss's mathematical diary, 1796-1814, with an English translation*, Expo. Math. 2(1982), 97-130.



Carl Friedrich Gauss (1803 r.)

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) to jeden z luminarzy światowej nauki, mający znakomite osiągnięcia w matematyce, astronomii, fizyce oraz geodezji. W 1899 roku odnaleziono *Dziennik* [1] z prywatnymi notatkami Gaussa dotyczącymi jego odkryć. Napisany po łacinie *Dziennik* zawiera 146 lakonicznych notatek z lat 1796–1814. Z zachowanej korespondencji Gaussa oraz z *Dziennika* wylania się postać bardzo pracowitego człowieka, który swoimi przemyśleniami wyprzedzał epokę o kilkadziesiąt lat. Publikował niewiele – gdy musiał. Większą wartość miało dla niego samo odkrycie niż jego ogłoszenie.

Do rozwoju Gaussa (pochodzącego z ubogiej rodziny) przyczynił się mecenat księcia Brunszwiku Karola Wilhelma Ferdynanda. Otoczył on opieką finansową czternastoletniego Carla i pomoc ta trwała do tragicznej śmierci księcia w 1806 roku. W tym czasie Gauss ukończył Collegium Carolinum, studiował na Uniwersytecie w Getyndze (szkoły wybierał ze względu na świetnie zaopatrzone biblioteki). Jednak przede wszystkim uzyskał spektakularne wyniki, które przyniosły mu międzynarodowe uznanie. Wyniki te opisał w *Dzienniku*.

- *Dziennik* rozpoczyna się wpisem z 30 marca 1796 roku dokonany w Brunszwiku: „zasady, według których możliwy jest konstrukcyjny podział okręgu na 17 równych części”. To pierwszy tego typu rezultat od czasów Euklidesa!
- Z października 1797 roku pochodzi dowód zasadniczego twierdzenia algebry. To temat dysertacji *Demonstratio nova theorematis...* opublikowanej w sierpniu 1799 roku, za którą Uniwersytet w Helmsted nadał Gaussowi stopień doktora (promotorem był Johann Pfaff).
- W 1801 roku ukazała się drukiem praca *Disquisitiones arithmeticae* prezentująca odkrycia Gaussa w teorii liczb.
- W połowie września 1801 roku Gauss podał metodę dokładnego wyznaczania orbity ciał niebieskich, co pozwoliło odnaleźć „zgubioną” planetoidę Ceres. Metodę udoskonalił, wprowadzając modyfikacje w styczniu i w maju 1806 roku.

Każde z tych osiągnięć wystarczyłoby do zapewnienia mu trwałego miejsca w historii nauki; a był to dopiero początek...

Średnia arytmetyczno-geometryczna

Gauss wspomina, że jako czternastoletni chłopak interesował się średnią arytmetyczno-geometryczną liczb $0 < b < a$. Jest ona zdefiniowana poprzez następującą konstrukcję. Z liczb a i b tworzymy dwa ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, rozpoczynając od $a_0 = a$ i $b_0 = b$, a następnie dla $n \geq 1$ kładąc:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}), \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, można indukcyjnie uzasadnić, że dla każdego $n \geq 1$

$$b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1},$$

zatem ciągi (a_n) , (b_n) są ograniczone, pierwszy z nich jest malejący, a drugi rosnący. Ponadto

$$\frac{a_n - b_n}{a_{n-1} - b_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{4(a_n + b_n)} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2(a_{n-1} + b_{n-1}) + 4b_n} < \frac{1}{2}.$$

Wniosujemy stąd, że

$$a_n - b_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - b), \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Oznacza to, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do tej samej granicy, którą oznaczamy $M(a, b)$. Liczbę $M(a, b)$ nazywamy *średnią arytmetyczno-geometryczną* liczb $0 < b < a$. Gauss, będąc wirtuozem obliczeń, w kilku przypadkach przeprowadził rachunki z bardzo dużą dokładnością. Dla $a = \sqrt{2}$ i $b = 1$ otrzymał:

Oczywiście można też rozważyć średnią harmoniczo-geometryczną $(a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n})$, średnią arytmetyczno-harmoniczną $(a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n})$ i ich rozmaite warianty.

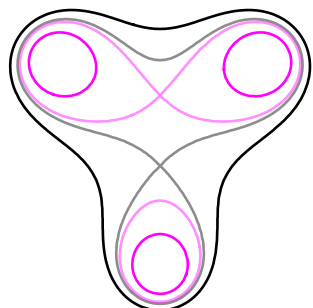
*Mamy tu do czynienia z tzw. zbieżnością kwadratową, gdyż

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq \frac{1}{8b}(a_n - b_n)^2,$$

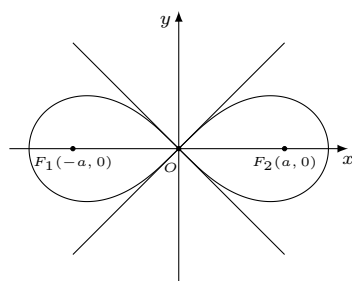
w czym skorzystaliśmy z równości $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (x - y)/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

$a = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 802$	$b = 1,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
$a_1 = 1,207\ 106\ 781\ 186\ 547\ 524\ 401$	$b_1 = 1,189\ 207\ 115\ 002\ 721\ 066\ 717$
$a_2 = 1,198\ 156\ 948\ 094\ 634\ 295\ 559$	$b_2 = 1,198\ 123\ 521\ 493\ 120\ 122\ 607$
$a_3 = 1,198\ 140\ 234\ 793\ 877\ 209\ 083$	$b_3 = 1,198\ 140\ 234\ 677\ 307\ 205\ 798$
$a_4 = 1,198\ 140\ 234\ 735\ 592\ 207\ 441$	$b_4 = 1,198\ 140\ 234\ 735\ 592\ 207\ 439$

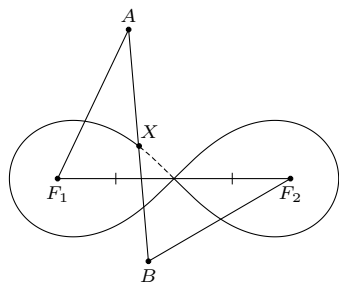
Ciągi te okazały się szybko zbieżne*, a wyrazy a_4 i b_4 równe do 19 miejsca po przecinku. Wtedy być może Gauss nie przypuszczał, że rezultat ten wykorzysta do obliczania... całek eliptycznych.



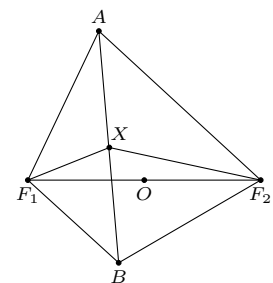
Rys. 1. Lemniskaty o trzech ogniskach



Rys. 2. Lemniskata Bernoulliego



Rys. 3



Rys. 4

Lemniskata

Lemniskatę o różnych ogniskach F_1, F_2, \dots, F_n tworzą punkty X na płaszczyźnie spełniające warunek $|F_1X| \cdot |F_2X| \cdot \dots \cdot |F_nX| = \text{const} > 0$ (rys. 1). Lemniskata o jednym ognisku to okrąg. W 1694 roku Jacob Bernoulli badał lemniskatę o dwóch ogniskach, $F_1(-a, 0)$ i $F_2(a, 0)$, spełniającą warunek

$$|F_1X| \cdot |F_2X| = a^2, \text{ dla } a > 0.$$

Jej równanie w układzie kartezjańskim to

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

a w układzie biegunowym (gdy przyjmiemy $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$) to

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi} \text{ dla } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Z ostatniej zależności łatwiej jest nam odkryć kształt tej krzywej, którą nazywamy *lemniskatą Bernoulliego* (rys. 2).

Do wykreślenia lemniskaty Bernoulliego możemy wykorzystać mechanizm przegubowy Jamesa Watta: bierzemy dwa odcinki, F_1A i F_2B , każdy o długości $\sqrt{2}a|F_1F_2|$. Niech punkty A i B leżą po przeciwnych stronach prostej wyznaczonej przez punkty F_1 i F_2 oraz $|AB| = 2a$ (rys. 3). Wtedy podczas ruchu środek X odcinka AB zakreśla lemniskatę Bernoulliego z ogniskami F_1 i F_2 . Dostrzeżemy to, analizując trapez równoramienny F_1AF_2B (rys. 4).

Ponieważ $\frac{|AF_1|}{|AX|} = \frac{|AB|}{|AF_1|} = \sqrt{2}$ i trójkąty $\triangle AF_1X$, $\triangle ABF_1$ mają wspólny kąt $\sphericalangle A$, więc trójkąty $\triangle AF_1X$ i $\triangle ABF_1$ są podobne. Analogicznie podobne są trójkąty $\triangle BXF_2$ i $\triangle BF_2A$ (mają one wspólny kąt $\sphericalangle B$). Wówczas

$$|\sphericalangle AF_1X| = |\sphericalangle ABF_1| = |\sphericalangle BAF_2| = |\sphericalangle XF_2B|.$$

W trapezie równoramiennym F_1AF_2B , $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B|$. Ponieważ $|\sphericalangle XAF_2| = |\sphericalangle XF_2B|$, więc $|\sphericalangle F_1AX| = |\sphericalangle XF_2A|$. Oznacza to, że trójkąty $\triangle F_1AX$ i $\triangle AF_2X$ są podobne. Stąd

$$\frac{|F_1X|}{|AX|} = \frac{|AX|}{|F_2X|} \Rightarrow |F_1X| \cdot |F_2X| = |AX|^2 = a^2,$$

czyli punkt X leży na lemniskacie Bernoulliego.

Pod datą 8 stycznia 1797 roku Gauss zanotował w *Dzienniku*, że rozpoczął badanie lemniskaty, a 21 marca tego samego roku napisał: „lemniskata podzielona konstrukcyjnie na 5 równych części”.

Skojarzenia i rachunki

Gauss uczył się, studiując prace wielkich poprzedników. Wspominał: „tyle myśli przychodziło mi do głowy, że zanotować zdążyłem zaledwie ich cząstkę”. Badania nad nieelementarnymi całkami opisującymi długość krzywych prowadziły do odkrywania nowych funkcji i leżały w głównym nurcie XVIII-wiecznej analizy. Ich przybliżoną wartość wyznaczano za pomocą szeregów nieskończonych. Badania te prowadzili di Fagnano, Euler, Landen, Lagrange, Legendre. Z notatek i *Dziennika* Gaussa wynika, że w latach 1797–1800 stworzył on teorię funkcji eliptycznych (30 lat przed Abelem i Jacobim), ale do końca życia zachował te rezultaty dla siebie.

**Rozwiązanie zadania F 1049.**

Niech gęstość atomów o prędkości \vec{v} wynosi $\rho(\vec{v})$. Wówczas w czasie τ do elementu S powierzchni ścianki naczynia dociera $n(\vec{v}) = \rho(\vec{v})\tau S \vec{v} \cdot \vec{n}$ atomów gazu – \vec{n} oznacza jednostkowy wektor prostopadły do elementu S powierzchni. Liczbę wszystkich atomów o prędkości $v = |\vec{v}|$ docierających do S otrzymamy, sumując po wszystkich kierunkach prędkości skierowanych „do ścianki” – da to czynnik geometryczny niezależny od v – oraz po wszystkich wartościach v . Drugie z sumowań prowadzi do czynnika proporcjonalnego do średniej prędkości $\langle v \rangle$ atomów gazu w danej temperaturze bezwzględnej T , mnożonego przez całkowitą gęstość ρ gazu w naczyniu (gęstość $\rho(\vec{v})$ jest proporcjonalna do gęstości ρ gazu w naczyniu). Mamy $\rho \propto 1/V$ oraz $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$ i ostatecznie:

$$n \propto S\tau\rho\sqrt{T} \propto S\tau\frac{1}{q}\sqrt{T}.$$

Podczas przemiany adiabatycznej $TV^{\kappa-1} = \text{const}$, gdzie κ oznacza stosunek molowego ciepła właściwego gazu pod stałym ciśnieniem c_p do jego molowego ciepła w stałej objętości c_v , $\kappa = c_p/c_v$. Mamy więc:

$$T \propto \frac{1}{V^{\kappa-1}} \propto \frac{1}{q^{\kappa-1}}.$$

Ostatecznie częstość n/τ uderzeń atomów po adiabatycznym zwiększeniu objętości q razy zmaleje:

$$\frac{n}{\tau} \propto \frac{1}{q^{(\kappa+1)/2}}.$$

Dla gazu jednoatomowego $\kappa = 5/3$, a więc $n/\tau \propto 1/q^{4/3}$.

**Rozwiązanie zadania F 1050.**

Jądra krzemu ${}^{27}\text{Si}$ i aluminium ${}^{27}\text{Al}$ mają te same liczby masowe, a więc ich promienie też są takie same. Maksymalna energia emitowanego pozytonu jest równa różnicy energii elektrostatycznych obu jąder:

$$\Delta E = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (Z_1^2 - Z_2^2).$$

Otrzymujemy:

$$R = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \Delta E} (Z_1^2 - Z_2^2).$$

Po podstawieniu danych liczbowych: $R = 6,703 \cdot 10^{-15}$ m, co odpowiada $r_0 = 2,23 \cdot 10^{-15}$ m – na podstawie pomiarów różnymi metodami przyjmuje się $r_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-15}$ m.

Uwaga: Czynniki Z^2 należałoby zastąpić czynnikiem $Z(Z-1)$ – dla uniknięcia uwzględniania energii oddziaływania każdego z protonów z jego własnym polem elektrostatycznym. Wprowadzenie tej poprawki daje $R = 6,454 \cdot 10^{-15}$ m.

Z elementarnego rachunku całkowego wiemy, że długości okręgu jednostkowego oraz wpisanej w niego lemniskaty Bernoulliego są równe odpowiednio:

$$4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oraz} \quad 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Dla oznaczenia połowy tej drugiej wielkości Gauss wprowadził stałą $\bar{\omega}$. Niezwykle jest jego spostrzeżenie, że między trzema stałymi:

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,46\dots,$$

$$\bar{\omega} = 2,622\,057\,554\,292\,119\,74\dots,$$

$$M(\sqrt{2}, 1) = 1,198\,140\,234\,735\,592\,207\,44\dots,$$

zachodzi związek $M(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$; innymi słowy, stosunek między długościami okręgu i lemniskaty to dokładnie $M(\sqrt{2}, 1)$. Gauss zaintrygowany tym odkryciem, 30 maja 1799 roku w Brunzswiku, zanotował w *Dzienniku*: „Średnia arytmetyczno-geometryczna liczb 1 i $\sqrt{2}$ jest równa $\frac{\pi}{\bar{\omega}}$ do 5 cyfr, dowód tego faktu odkryje nowe obszary analizy”. Był to jedynie domysł oparty na rachunkach, ale intuicja Gaussa nie zawiodła. Ogólną zależność Gauss wykazał 22 maja 1800 roku:

$$(*) \quad \text{dla } 0 < b \leq a, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{M(a, b)}.$$

Oczywiście podstawienie $\cos \varphi = x$ sprowadza całkę $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$ do całki postaci $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Wykazanie równości (*) nie jest trudne. Niech a i b generują ciągi (a_n) i (b_n) opisane wcześniej, zbieżne do $M(a, b)$. Dla całki $I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$, dzięki podstawieniu $t = b \cdot \text{tg } \varphi$ (wówczas $\sin^2 \varphi = \frac{t^2}{t^2+b^2}$, $\cos^2 \varphi = \frac{b^2}{t^2+b^2}$, $d\varphi = \frac{b}{t^2+b^2} dt$), otrzymujemy

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}.$$

W takim razie

$$I(a_1, b_1) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a_1^2)(t^2+b_1^2)}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a_1^2)(t^2+b_1^2)}}.$$

W ostatniej całce podstawienie $t = \frac{1}{2}(x - \frac{ab}{x})$ (wówczas $t^2 + a_1^2 = \frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}$, $t^2 + b_1^2 = \frac{(x^2+ab)^2}{4x^2}$, $dt = \frac{x^2+ab}{2x^2} dx$) daje

$$I(a_1, b_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a_1^2)(t^2+b_1^2)}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = I(a, b).$$

Powtarzając to rozumowanie, otrzymujemy $I(a, b) = I(a_1, b_1) = I(a_2, b_2) = \dots$, zatem w granicy

$$I(a, b) = I\left(M(a, b), M(a, b)\right) = \frac{1}{M(a, b)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ze względu na szybkość zbieżności ciągów średnich wzór (*) daje bardzo efektywny sposób szacowania wartości tego rodzaju całek eliptycznych.

Zapowiedziany przez Gaussa „nowy obszar analizy” pojawia się z chwilą, gdy zapytamy o sens równości (*) w dziedzinie zespolonej. Pojawiają się wtedy funkcje wielowartościowe, modularne, dla których Gauss uzyskał zupełnie nowe wyniki. Dlaczego ich nie opublikował? Może widział niedoskonałości użytych metod, może przeczuwał, że do pełnej prezentacji potrzebna jest teoria funkcji analitycznych z jej narzędziami analitycznymi – ale ta miała się dopiero narodzić! Poza tym miał dopiero 23 lata i całe życie przed sobą. . .