Po co nam Δ?

*Michał MIŚKIEWICZ**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Nie, nie zamierzam poddawać w wątpliwość sensu istnienia tego szacownego czasopisma, bo też trudno sobie wyobrazić, co byśmy bez niego zrobili. Chodzi mi o *deltę* znaną nam ze szkolnych lekcji matematyki.

Równanie kwadratowe a Δ

Ogólna postać równania kwadratowego to $ax^2 + bx + c = 0$, ale wystarczy podzielić stronami przez a, by ją sprowadzić do tej rozważanej obok.

Na tak postawione pytanie odpowiedź sama się narzuca – wyróżnik, czyli popularna *delta*, pozwala nam obliczyć rozwiązania równania kwadratowego. Mianowicie dla równania postaci $x^2 + bx + c = 0$ możemy najpierw wyznaczyć $\Delta = b^2 - 4c$, a następnie uzyskać dwa rozwiązania:

$$(\star) \qquad x_0 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

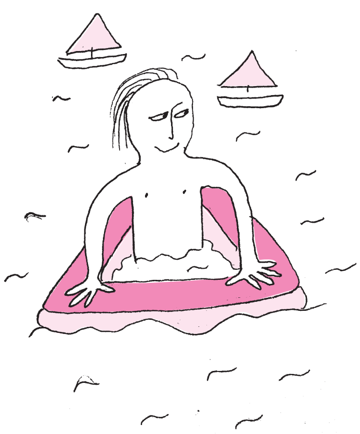
Jeśli w ten sposób postawimy sprawę, Δ pełni jedynie rolę pomocniczej wielkości, która pozwala podzielić proces wyznaczania rozwiązań na dwa etapy.

Wielkość ta nie bierze się jednak znikąd. Jednym ze sposobów na przekonanie się o tym jest odjęcie stronami obu równości w $(\star)$. Współczynnik b się wtedy skraca i widzimy, że $\sqrt{\Delta}$ jest równy $x_1 - x_0$, czyli różnicy rozwiązań. Przypomnijmy, że sumę rozwiązań możemy wyznaczyć ze wzorów Viète'a. Wzory te (przytoczone na marginesie) wynikają po prostu z przyrównania odpowiednich współczynników wielomianów $x^2 + bx + c$ oraz $(x - x_0)(x - x_1)$. W naszym przypadku wystarczy jeden z nich – jeśli wiemy, że $x_1 - x_0 = \sqrt{\Delta}$ oraz $x_0 + x_1 = -b$, to taki układ dwóch równań liniowych łatwo rozwiązać, otrzymując wzory opisane w $(\star)$.

Wzory Viète'a:
$x_0 + x_1 = -b$,
$x_0 x_1 = c$.

Pozostaje uzasadnić, skąd wziął się wzór $\Delta = b^2 - 4c$. Otóż jeśli $\sqrt{\Delta}$ jest różnicą rozwiązań, to Δ jest kwadratem tej różnicy, a tę wielkość nietrudno wyznaczyć ze wzorów Viète'a:

$$\Delta = (x_1 - x_0)^2 = x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 = (x_0 + x_1)^2 - 4x_0x_1 = b^2 - 4c.$$



Zadanie 1. Korzystając z zależności $\Delta = (x_1 - x_0)^2$, wyjaśnić, o czym świadczy każdy z trzech przypadków:
- $\Delta < 0$,
- $\Delta = 0$,
- $\Delta > 0$.

Zadanie 2. Wielkość $(x - y)^2$ umiemy wyrazić poprzez $x + y$ i xy. Sprawdzić, że podobnie można przedstawić $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$ itd., jak również każde inne wyrażenie wielomianowe symetryczne ze względu na zamianę miejscami x i y.

Wskazówka. Sukcesywnie wyjmować przed nawias xy i odejmować $x + y$ podniesione do odpowiedniej potęgi.

Równanie trzeciego stopnia – co Δ mówi o rozwiązaniach?

Przejdźmy krok dalej i rozważmy równanie postaci $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Zaczniemy od przyjrzenia się, co o jego rozwiązaniach może nam powiedzieć wyróżnik.

Tzw. podstawowe twierdzenie algebry mówi, że zawsze istnieją trzy pierwiastki, jeśli tylko liczymy je zgodnie z ich krotnością i nie unikamy liczb zespolonych.

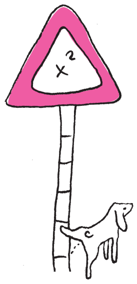
Powiedzmy, że rozwiązania są trzy: x_0, x_1, x_2. Motywowani przypadkiem kwadratowym, tutaj wprowadzimy wyróżnik równania jako

$$(\star\star) \qquad \Delta = (x_0 - x_1)^2(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_0)^2.$$

Odnotujmy od razu dwie pożyteczne obserwacje:
- Jeśli równanie ma pierwiastek wielokrotny, czyli np. $x_0 = x_1$, to $\Delta = 0$.
- Jeśli pierwiastki x_0, x_1, x_2 są trzema różnymi liczbami rzeczywistymi, to $\Delta > 0$.

Dobre wprowadzenie w tematykę liczb zespolonych można znaleźć w tekście Zbigniewa Marciniaka z Δ^{10}_{16}.

Do analizy przypadku $\Delta < 0$ będziemy potrzebować liczb zespolonych. Przyjmijmy mianowicie, że rozwiązaniem równania $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ jest liczba zespolona $x_1 = u + iv$, gdzie u, v są liczbami rzeczywistymi i $v \neq 0$ (a więc nie mamy do czynienia z liczbą rzeczywistą w przebraniu). Kluczowa będzie obserwacja, że jeśli x_1 jest rozwiązaniem równania $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, to rozwiązaniem jest również $x_2 := u - iv$ (tzw. *sprzężenie* x_1). Opiera się to na poniższym fakcie:



Zadanie 3. Jeśli liczba $u + iv$ po wstawieniu do wielomianu $x^3 + bx^2 + cx + d$ (o współczynnikach rzeczywistych) daje $s + it$ (gdzie $s, t \in \mathbb{R}$), to wstawienie $u - iv$ daje w wyniku $s - ti$.

Istotnie, w przypadku, gdy $s + it = 0$, zerować się muszą obie liczby s i t, a w konsekwencji zerem jest również $s - it$. Podstawowe twierdzenie algebry gwarantuje istnienie jeszcze trzeciego pierwiastka x_0, ale ten musi już być rzeczywisty – inaczej jego sprzężenie byłoby czwartym pierwiastkiem, a co za dużo, to niezdrowo. Ta wiedza pozwala już wyznaczyć znak wyróżnika. Wyraz $(x_1 - x_2)^2$ wynosi bowiem

$$(x_1 - x_2)^2 = \big((u + iv) - (u - iv)\big)^2 = (2iv)^2 = -4v^2,$$

a wyrazy $x_1 - x_0$ i $x_2 - x_0$ mnożą się do

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = (u - x_0 + iv)(u - x_0 - iv) = (u - x_0)^2 - (iv)^2 = (u - x_0)^2 + v^2.$$

Po zebraniu wszystkiego razem otrzymujemy $\Delta = -4v^2\left((u - x_0)^2 + v^2\right)^2$, co dzięki warunkom $x_0, u, v \in \mathbb{R}$ i $v \neq 0$ na pewno jest liczbą ujemną. To dopełnia naszej analizy:

- Jeśli równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone, to $\Delta < 0$.

Jak znaleźć Δ?

Przekonaliśmy się, że w przypadku równań trzeciego stopnia znak wyróżnika Δ daje taką samą informację, jak w przypadku równań kwadratowych. Ale jak wyznaczyć Δ, nie znając z góry pierwiastków x_0, x_1, x_2? Na pomoc znowu przychodzą wzory Viète'a.

Wzory Viète'a raz jeszcze:
$x_0 + x_1 + x_2 = -b$,
$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = c$,
$x_0x_1x_2 = -d$,
(dla równania $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$).

Po otwarciu nawiasów w ($\star\star$) widzimy jedynie szóste potęgi pierwiastków (np. $x_1^2x_2^4$, $x_0^2x_1^3x_2$). Na zasadzie analogii do wzoru $b^2 - 4c$ w poszukiwanym wzorze na Δ spodziewalibyśmy się więc wyrazów typu b^6, c^3, d^2, ale nie tylko (np. bcd też jest szóstego stopnia). Jest ich dużo, więc rozpatrzmy najpierw przypadek równania $x^3 + cx + d = 0$ z zerowym współczynnikiem b. W nieznanym jeszcze wzorze na Δ wszystkie wyrazy z b znikają i pozostają jedynie dwie kombinacje stopnia 6: c^3 oraz d^2. Postulujemy więc, że w przypadku $b = 0$ wzór ma postać $\Delta = S \cdot c^3 + T \cdot d^2$. Pozostaje znaleźć S i T.

To jest jednak najłatwiejsza część tego przedsięwzięcia. Wystarczy sprawdzić postulowany wzór na dwóch wybranych równaniach o znanych pierwiastkach:

$$\Delta = S \cdot (-3)^3 + T \cdot 2^2 \quad \leftrightarrow \quad x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1)(x+2) \quad \leftrightarrow \quad \Delta = 0$$

$$\Delta = S \cdot (-1)^3 + T \cdot 0^2 \quad \leftrightarrow \quad x^3 - x = x(x-1)(x+1) \quad \leftrightarrow \quad \Delta = 4.$$

Rozwiązanie otrzymanego układu równań daje nam $S = -4$ i $T = -27$, a więc:

$$\boxed{\Delta = -4c^3 - 27d^2}$$

Alternatywne uzasadnienie wzoru na Δ można otrzymać, opierając się na zadaniu 7.

Wzór ten można oprawić w ramkę – tak jak wyżej – i przejść do następnej sekcji, by zobaczyć rozwiązanie równania trzeciego stopnia. Można też ten wzór ściśle uzasadnić; nasze owocne poszukiwania nie stanowiły wszak dowodu, że wzór w ramce *działa*. W tym celu zauważmy, że dowolne równanie $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ daje się sprowadzić do poprzedniego przypadku poprzez podstawienie $x = y - \frac{b}{3}$. Po otwarciu nawiasów i uproszczeniu okazuje się bowiem, że y spełnia równanie postaci

$$y^3 + Cy + D = 0 \quad \text{ze współczynnikami} \quad C = c - \frac{b^2}{3}, \quad D = d + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3},$$

ale już bez współczynnika przy y^2. Dla powstałego równania wyróżnik – tym razem wyznaczony przez rozwiązania y_0, y_1, y_2 pomocniczego równania – jest dany wzorem w ramce, czyli $-4C^3 - 27D^2$.

Zachęcam Czytelnika do złożenia wszystkich elementów tej układanki w całość, a w rezultacie – do ścisłego uzasadnienia wzoru w ramce:

Zadanie 4. Uzasadnić, że wyróżniki obu równań (na x i na y) są takie same. Wyprowadzić stąd wzór $\Delta = \frac{1}{27}(4(b^2 - 3c)^3 - (2b^3 - 9bc + 27d)^2)$.

Zadanie 5. Sprawdzić bezpośrednio, że wzór z zadania 4 po podstawieniu b, c, d według wzorów Viète'a jest tożsamy ze wzorem ($\star\star$).

Rozwiązanie równania trzeciego stopnia

Piękne wyprowadzenie rozwiązań takiego równania pochodzące od XVI-wiecznych włoskich matematyków można znaleźć w artykule Marka Kordosa z Δ^1_{11}. Tutaj jednak, żeby podkreślić rolę wyróżnika Δ w rozwiązywaniu równania trzeciego stopnia, pójdziemy za XVIII-wiecznym rozumowaniem Josepha Lagrange'a.

Dla równania $x^3 + px + q = 0$:
$x_0 + x_1 + x_2 = 0$,
$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = p$,
$x_0x_1x_2 = -q$.

Dla uproszczenia sytuacji załóżmy, że współczynnik przy x^2 jest zerowy, a więc mamy do czynienia z równaniem $x^3 + px + q = 0$ (oznaczenia tradycyjne); w szczególności $\Delta = -4p^3 - 27q^2$. Widzieliśmy już zresztą, że ogólny przypadek daje się do tego sprowadzić przez liniowe podstawienie.

Warto zauważyć, że niektóre permutacje pierwiastków zmieniają znak wyrażenia obok, a niektóre nie. Jest to związane z niejednoznacznością $\sqrt{\Delta}$ – wszak (poza przypadkiem $\Delta = 0$) są dwie liczby dające w kwadracie Δ, więc wybór jednej z nich jest całkiem arbitralny.

Na dobry początek zobaczmy, co nam daje wyciągnięcie pierwiastka z Δ. Otóż daje tyle:

$$\sqrt{\Delta} = (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_0) = (x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + x_0^2x_2) - (x_0^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2^2x_0).$$

Podobne wyrażenie, tylko z plusem, można wyznaczyć ze współczynników równania jako

$$\sum_{j\neq k} x_j^2x_k = (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0)(x_0 + x_1 + x_2) - 3x_0x_1x_2 = 3q,$$

skąd $x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + x_0^2x_2 = (3q + \sqrt{\Delta})/2$ i $x_0^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2^2x_0 = (3q - \sqrt{\Delta})/2$. Do tych wątpliwej urody równości jeszcze wrócimy.

Kluczową własnością liczby ε jest to, że $\varepsilon^3 = 1$ – stąd też nazwa *pierwiastek z jedynki*. Pozwala to obliczać kolejne potęgi (np. $\varepsilon^4 = \varepsilon$) oraz wielkości takie jak $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$ (które jest równe zero jako iloraz $\frac{1-\varepsilon^3}{1-\varepsilon}$).

Przebiegłym pomysłem Lagrange'a było zastosowanie *dyskretnej transformaty Fouriera*. W naszym przypadku oznacza to po prostu, że wprowadzimy na scenę pierwiastek trzeciego stopnia z jedynki $\varepsilon := \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ i rozważymy pomocnicze wielkości $s_k = \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^{jk} \cdot x_j$, czyli

$$s_0 = x_0 + x_1 + x_2, \quad s_1 = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \quad s_2 = x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2.$$

Jak łatwo się przekonać, tzw. *odwrotna transformata* daje $x_k = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{2} \varepsilon^{-jk} \cdot s_j$, czyli

$$x_0 = \tfrac{1}{3}\left(s_0 + s_1 + s_2\right), \quad x_1 = \tfrac{1}{3}\left(s_0 + \varepsilon^2 s_1 + \varepsilon s_2\right), \quad x_2 = \tfrac{1}{3}\left(s_0 + \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2\right).$$

Te ostatnie wzory mają dla nas znaczenie jedynie o tyle, że **gdy wyznaczymy** s_0, s_1, s_2**, będziemy umieli też wyznaczyć** x_0, x_1, x_2. I to jest pewien postęp, bo ze wzorów Viète'a mamy już $s_0 = 0$. Z kolei iloczyn s_1s_2 jest równy

$$s_1s_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0) =$$
$$= (x_0 + x_1 + x_2)^2 - 3(x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0) = -3p.$$

To oznacza, że $s_2 = -\frac{3p}{s_1}$ i do pełnego sukcesu wystarczy nam wyznaczyć s_1.

I tutaj przyda się $\sqrt{\Delta}$. Otóż s_1 do sześcianu ma znajomą wartość

$$s_1^3 = (x_0+x_1+x_2)^3 + 3(\varepsilon-1)(x_0^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2^2x_0) + 3(\varepsilon^2-1)(x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + x_0^2x_2) =$$
$$= \tfrac{3}{2}(\varepsilon - 1)(3q - \sqrt{\Delta}) + \tfrac{3}{2}(\varepsilon^2 - 1)(3q + \sqrt{\Delta}) = -\frac{27}{2}q - \frac{3\sqrt{3}i}{2}\sqrt{\Delta},$$

Tak jak z pierwiastkiem z Δ, tak i tutaj jest niejednoznaczność. Pierwiastek sześcienny można wyciągnąć na trzy sposoby, które odpowiadają różnym kolejnościom pierwiastków x_0, x_1, x_2.

możemy więc wyciągnąć pierwiastek trzeciego stopnia z powyższej wielkości, by wyliczyć s_1, a następnie s_2 i wszystkie pierwiastki x_0, x_1, x_2. Choć metoda jest dość zawiła, to jej wynik da się częściowo streścić:

$$x_0 = \tfrac{1}{3}\left(s_1 - \frac{3p}{s_1}\right), \quad \text{gdzie } s_1 = 3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

I to by było na tyle!

Zadanie 6. Jak na ironię, gdy istnieją trzy rozwiązania rzeczywiste x_0, x_1, x_2 (czyli gdy $\Delta > 0$), pomocnicze wartości s_1^3 i s_1 nie są rzeczywiste.

Zadanie 7. Niech $f(x, y, z)$ będzie wielomianem symetrycznym ze względu na permutację zmiennych x, y, z. Wykazać, że da się go przedstawić jako wyrażenie wielomianowe od wielkości $x + y + z$, $xy + yz + zx$, xyz.
(niektórzy Czytelnicy mogą znać to zadanie jako zastosowanie teorii Galois, ale da się je też rozwiązać elementarnie).