KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 42

Liczba i suma dzielników

Bartłomiej BZDĘGA

Niech $\tau(n)$ i $\sigma(n)$ oznaczają odpowiednio liczbę i sumę dzielników liczby całkowitej dodatniej n. Rozważmy rozkład liczby n na czynniki pierwsze:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Na mocy zasadniczego twierdzenia arytmetyki liczba całkowita dodatnia d jest dzielnikiem liczby n wtedy i tylko wtedy, gdy można ją zapisać w postaci

$$(1) \qquad d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}, \quad \text{przy czym } \beta_i \in \{0, 1, \ldots, \alpha_i\} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Każdą z liczb β_i możemy wybrać niezależnie na $\alpha_i + 1$ sposobów, więc na mocy reguły mnożenia

$$(2) \qquad \tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1).$$

W celu uzasadnienia wzoru na sumę dzielników

$$(3) \quad \sigma(n) = (1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\ldots(1+p_k+p_k^2+\ldots+p_k^{\alpha_k}),$$

wymnażamy jego prawą stronę – jest ona równa

$$\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \ldots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} = \sum_{d|n} d$$

na mocy (1).

Na koniec pokażę, jak można oszacować wartość $\sigma(n)$, znając tylko dzielniki pierwsze liczby n. Zauważmy, że dla liczby pierwszej p i liczby całkowitej $\alpha \geqslant 1$ zachodzą nierówności

$$\frac{p+1}{p} = \frac{p^\alpha + p^{\alpha-1}}{p^\alpha} \leqslant \frac{1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha}{p^\alpha} < 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots = \frac{p}{p-1}.$$

Po wymnożeniu ich stronami dla liczb p_i, α_i przy $i = 1, 2, \ldots, k$, na mocy (3), otrzymamy następujące nierówności:

$$(4) \qquad \frac{p_1+1}{p_1} \cdot \frac{p_2+1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k+1}{p_k} \leqslant \frac{\sigma(n)}{n} < \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k}{p_k-1}.$$

Zadania.

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, których liczba dzielników wynosi $\sqrt{n}$.
2. Liczba całkowita dodatnia n ma dokładnie trzy razy mniej dzielników niż liczba n^2. Ile dzielników może mieć liczba n?
3. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, które mają nieparzystą
   (a) liczbę dzielników,
   (b) sumę dzielników.
4. Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią n. Wyrazić za pomocą funkcji τ liczbę rozwiązań równania $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ w liczbach całkowitych x i y.
5. Liczby całkowite dodatnie m i n nazywamy *zaprzyjaźnionymi*, jeśli spełniają warunki $\sigma(n) = 2m$ i $\sigma(m) = 2n$. Dowieść, że jeśli m i n są liczbami zaprzyjaźnionymi, to iloczyn sumy odwrotności dzielników liczby n i sumy odwrotności dzielników liczby m jest równy 4.
6. Liczbę całkowitą dodatnią n nazywamy *doskonałą*, jeśli $\sigma(n) = 2n$. Dowieść, że
   (a) nieparzysta liczba doskonała ma przynajmniej trzy różne dzielniki pierwsze;
   (b) parzysta liczba jest doskonała wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $2^{p-1}(2^p - 1)$, w której liczby p i $2^p - 1$ są pierwsze.
7. Liczbę całkowitą dodatnią n nazwijmy *hiperdoskonałą*, jeśli $\sigma(n) = 3n$. Udowodnić, że jeśli liczba hiperdoskonała ma dokładnie trzy różne dzielniki pierwsze, to jest ona podzielna przez 6.
8. Niech $n > 6$ będzie liczbą doskonałą oraz niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n. Dowieść, że w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze liczba p występuje z wykładnikiem parzystym.

Wskazówki do zadań

1. Liczba n musi być kwadratem liczby naturalnej. Zapiszmy $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \ldots p_k^{2\alpha_k}$. Mamy do rozwiązania równość $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \ldots (2\alpha_k + 1) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot p_k^{\alpha_k}$. Skorzystać z nietrudnej do wykazania nierówności $(2\alpha + 1) < p^\alpha$, która zachodzi, gdy $p > 3$.

2. Mamy $\frac{3}{2} \leqslant \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} < 2$ dla $\alpha \geqslant 1$, więc jeśli liczba n ma dokładnie k różnych dzielników pierwszych, to $(3/2)^k \leqslant \frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} < 2^k$.

3. (a) Bezpośrednio ze wzoru (2) wynika, że $\tau(n)$ jest nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie α_i są parzyste.
   (b) Rozważyć osobno n parzyste i nieparzyste. Dla liczb pierwszych $p > 2$ parzystość sumy $1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha$ jest inna niż parzystość liczby α.

4. Równanie to jest równoważne równaniu $(x - n)(y - n) = n^2$ przy założeniu $x, y \neq 0$.

5. Suma odwrotności dzielników liczby całkowitej dodatniej n jest równa $\sigma(n)/n$.

6. (a) Prawa strona nierówności (4) maksymalizuje się dla możliwie najmniejszych liczb pierwszych – w tym przypadku 3, 5 i 7.
   (b) ($\Leftarrow$) Podstawienie do wzoru (3) daje $\sigma(n) = 2n$.
   ($\Rightarrow$) Zapiszmy $n = 2^{a-1}m$, przy czym $2 \nmid m$ i $a \geqslant 2$. Wtedy $2^a m = 2n = \sigma(n) = (2^a - 1)\sigma(m)$. Liczby 2^a i $2^a - 1$ są względnie pierwsze, więc $\sigma(m) = t \cdot 2^a$ i $m = t(2^a - 1)$ dla pewnego $t \in \mathbb{Z}_+$. Przez szacowanie z dołu prawej strony równości $t \cdot 2^a = \sigma(t(2^a - 1))$ wykazać, że $t = 1$, a następnie, że liczba $2^a - 1$ musi być pierwsza, z czego wynika, że a też jest liczbą pierwszą.

7. Niech $p < q < r$ będą dzielnikami pierwszymi liczby hiperdoskonałej n. Postępując analogicznie jak w zadaniu 6(a), wykazać, że jeśli $p > 2$, to $\sigma(n) < 3n$. Powtórzyć rozumowanie dla $p = 2$ i $q > 3$.

8. Niech $n = p^\alpha m$, przy czym $p \nmid m$. Jeśli $\alpha = 2a + 1$, to $1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha = (1 + p)(1 + p^2 + p^4 + p^{2a})$, więc $p + 1 \mid \sigma(n)$, czyli $p + 1 \mid 2n$. Jeśli $p > 2$, to $\frac{p+1}{2} \mid n$, co prowadzi do sprzeczności. Wobec tego $p = 2$. Można teraz skorzystać z zadania 6(b) albo zauważyć, że $3 \mid n$, a jeśli $6 \mid n$ i $n > 6$, to $\sigma(n) \geqslant n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 1$.