Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 829 ($WT = 3{,}29$) i 830 ($WT = 1{,}43$) z numeru 11/2021

Witold Bednarek	Łódź	39,87
Krzysztof Maziarz	Kraków	38,88
Kacper Morawski	Warszawa	38,59
Andrzej Kurach	Ryjewo	38,29
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Marek Spychała	Warszawa	31,73
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34

Zadania z matematyki nr 843, 844

Redaguje Marcin E. KUCZMA

843. Po krawędziach wypukłego wielościanu pełza żuk. W każdym wierzchołku wielościanu schodzą się trzy krawędzie. Po dojściu do wierzchołka żuk nie zawraca w krawędź, którą przyszedł, lecz wybiera jedną z pozostałych dwóch krawędzi – lewą lub prawą (orientacja: lewo/prawo – tak, jak widać, patrząc z zewnątrz wielościanu). Gdy na jednym rozdrożu żuk wybrał wariant lewy, na następnym wybiera prawy – i na odwrót. Dowieść, że w pewnym momencie żuk wróci do punktu, z którego rozpoczął wędrówkę.

844. Wyjaśnić, czy istnieje liczba pierwsza p, dla której suma
$$1^p + 3^p + \ldots + (2p-1)^p$$
jest sześcianem liczby naturalnej.

Zadanie 844 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2022

Przypominamy treść zadań:

835. Dana jest liczba naturalna n podzielna przez 3 oraz ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach 1, 2 lub 3, przy czym jedynek, dwójek i trójek jest tyle samo (po $n/3$). Dowieść, że dla pewnych numerów k, l ($1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$) zachodzi równość $x_k + \ldots + x_l = n$.

836. (**a**) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych x, dla których oba wyrażenia $x^{1/2} + x^{-1/2}$ oraz $x^{1/3} + x^{-1/3}$ mają wartości całkowite.

(**b**) Ustalić, ile jest liczb $x \geqslant 1$ o powyższej własności takich, że $\lfloor x \rfloor$ ma w zapisie dziesiętnym nie więcej niż 2022 cyfry.

835. Niech $s_k = x_1 + \ldots + x_k$ dla $k = 1, \ldots, n$ (więc $s_n = 2n$) i niech $S = (s_1, \ldots, s_n)$. Sąsiadujące elementy ciągu S różnią się co najwyżej o 3.

Przypuśćmy, że teza zadania nie zachodzi. Wtedy $s_k \neq s_l + n$ dla $k, l = 1, \ldots, n$. Ma więc miejsce równoważność:

(1) $\qquad t \in S \iff t + n \notin S \quad$ dla $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Skoro $2n \in S$, zatem $n \notin S$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $n-1 \in S$. Niech $n - 1 = s_m$. Przyjmijmy, że w ciągu $M = (x_1, \ldots, x_m)$ jest a jedynek, b dwójek, c trójek. Tak więc

(2) $$a + 2b + 3c = n - 1.$$

Niech x_j będzie jedną (dowolną) z tych a jedynek. Liczby $\alpha = s_{j-1}$, $\beta = s_j$ różnią się o 1 (gdy $j = 1$, przyjmujemy $\alpha = 0$). Liczby $\alpha + n$, $\beta + n$ nie należą do S (własność (1)). Wśród trzech kolejnych liczb musi być element S, wobec czego liczby $\gamma = \alpha + n - 1$, $\delta = \beta + n + 1$ należą do S; różnią się o 3, więc wyznaczają pewien element $x_r = 3$ (ten, dla którego $s_r = \delta$). W ten sposób każdej jedynce z ciągu M została przyporządkowana pewna trójka z ciągu $N = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

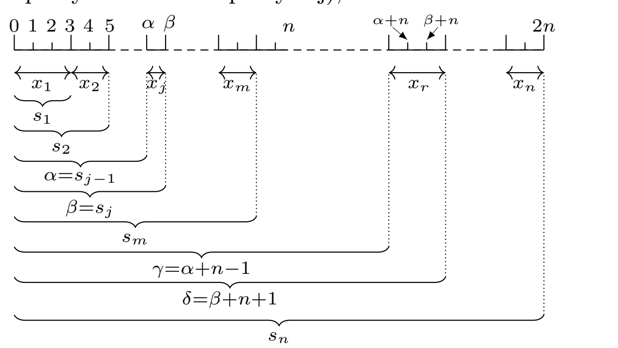
Na odwrót, biorąc dowolny element $x_r = 3$ z ciągu N, widzimy, że liczby $\delta = s_r$ oraz $\gamma = \delta - 3$ należą do S, liczby $\gamma + 1$, $\delta - 1$ nie należą, więc $\alpha = \gamma + 1 - n$, $\beta = \delta - 1 - n$ należą (własność (1)) i wyznaczają pewien element $x_j = 1$ (ten, dla którego $s_j = \beta$) – każdej trójce z ciągu N została przyporządkowana pewna jedynka z ciągu M. Te przyporządkowania są wzajemnie odwrotne i ustalają bijekcję między jedynkami w M i trójkami w N. Mamy więc a trójek w ciągu N oraz c trójek w ciągu M. Stąd

(3) $$a + c = n/3$$

(bo tyle jest wszystkich trójek w $(x_1, \ldots, x_n)$).

Pozostaje przypadek, gdy $n - 1 \notin S$. Wtedy $n + 1 \in S$ (bo $n \notin S$). Niech $n + 1 = s_m$. Odwracamy kierunek; oznaczamy przez a, b, c liczby jedynek, dwójek, trójek w ciągu $(x_{m+1}, \ldots, x_n) = N$, którego elementy teraz sumują się do wartości $s_n - s_m = n - 1$; wzór (2) nadal w mocy. Rozumowanie analogiczne jak poprzednio ustala bijekcję między jedynkami w N i trójkami w M i ponownie implikuje równość (3).

Uzyskane w obu przypadkach zależności (2) i (3) dają oczekiwaną sprzeczność:
$$6(b+c) = 3(a+2b+3c) - 3(a+c) = 3(n-1) - 3(n/3) = 2n - 3$$
(liczba parzysta równa nieparzystej); koniec dowodu.



836. Niech $c = x^{1/6} + x^{-1/6}$. Wówczas

(4) $\qquad x^{1/2} + x^{-1/2} = c^3 - 3c, \qquad x^{1/3} + x^{-1/3} = c^2 - 2.$

Jasne, że jeśli c jest liczbą naturalną większą od 1, to te wartości są liczbami naturalnymi. Ale i na odwrót: jeżeli liczby $c^3 - 3c$ oraz $c^2 - 2$ (więc także c^2 oraz $c^2 - 3$) są naturalne, to $c = (c^3 - 3c)/(c^2 - 3)$ jest dodatnią liczbą wymierną o kwadracie całkowitym – jest więc liczbą naturalną. Rozważany warunek, by wartości wyrażeń (4) były całkowite dodatnie, sprowadza się do tego, by liczba $c = x^{1/6} + x^{-1/6}$ była całkowita.

Funkcja $f(x) = x^{1/6} + x^{-1/6}$ przyjmuje (dla $x > 0$) wszystkie wartości z przedziału $[2, \infty)$. Punkty, w których przyjmuje wartości całkowite $c \geqslant 2$, tworzą zbiór nieskończony; to teza (**a**) zadania.

W części (**b**) chodzi o ustalenie, w ilu punktach przedziału $[1, 10^{2022})$ ma ona wartości całkowite. Ponieważ jest w tym przedziale ciągła i ściśle rosnąca, jest to po prostu pytanie o to, ile jest liczb całkowitych w przedziale $J = [f(1), f(10^{2022}))$. Skoro $f(1) = 2$, zaś $f(10^{2022}) = 10^{337} + 10^{-337} < 10^{337} + 1$, zatem do przedziału J należą liczby całkowite $2, 3, \ldots, 10^{337}$, i tylko one. Jest więc $10^{337} - 1$ tych liczb, i taka jest odpowiedź na pytanie (**b**).

Klub 44 F

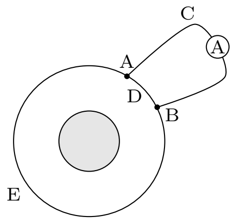
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2022

Zadania z fizyki nr 740, 741

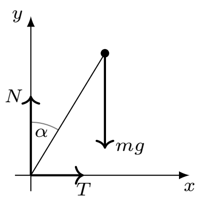
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

740. Gdy pocisk wystrzelony pionowo do góry rozrywa się w najwyższym punkcie toru, to rozpada się na bardzo dużo odłamków lecących równomiernie we wszystkie strony z prędkością początkową v_0. Taki sam pocisk lecący pionowo w dół rozrywa się na wysokości H nad ziemią i w chwili rozerwania ma prędkość u. Kiedy odłamki będą padać na ziemię z największą częstością?

741. Na nieruchome, płaskie zwierciadło o masie m pada prostopadle do jego powierzchni płaska fala świetlna o energii W_0. Znaleźć prędkość końcową zwierciadła i energię odbitej od niego fali. Rozważyć przypadki graniczne, gdy energia fali padającej jest dużo większa oraz dużo mniejsza od energii spoczynkowej zwierciadła.



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 2/2022

Przypominamy treść zadań:

732. Nieważki pręt z umocowaną na końcu kulką o masie m postawiono pionowo na podłodze. Kulkę możemy traktować jako punkt materialny. Pręt zaczyna przewracać się z zerową prędkością początkową i nie ślizga się do chwili, gdy przestaje naciskać na podłogę. Jaką wartość ma w tej chwili kąt α_0, jaki pręt tworzy z pionem? Ile wynosi współczynnik tarcia między prętem a podłogą? Ile wynosi siła tarcia, gdy pręt tworzy z pionem kąt $\alpha \leqslant \alpha_0$?

733. Zmienne pole magnetyczne wytwarza w jednorodnym przewodniku ADBEA w kształcie okręgu (rys. 1) stałą siłę elektromotoryczną ε. Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny przewodnika i przechodzą przez powierzchnię w kształcie koła zacienioną na rysunku, pole ma oś symetrii przechodzącą przez środek przewodzącego pierścienia i prostopadłą do płaszczyzny przewodnika. W punktach A i B do pierścienia podłączony jest amperomierz. Opory przewodników ADB, AEB i ACB wynoszą odpowiednio R_1, R_2 i R_3. Jakie jest napięcie między punktami A i B?

732. Pręt nie ślizga się, więc kulka porusza się po okręgu o środku w punkcie podparcia. Siły działające na układ przedstawia rysunek 2. Przyspieszenie kątowe ε oraz prędkość kątową ω możemy wyliczyć z równania ruchu obrotowego

$$mgl\sin\alpha = ml^2\varepsilon$$

i z zasady zachowania energii

$$mgl\,(1-\cos\alpha) = m(\omega l)^2/2,$$

gdzie przez l oznaczyliśmy długość pręta.

Przyspieszenie dośrodkowe kulki $a_d = \omega^2 l$, przyspieszenie styczne $a_s = \varepsilon l$, przyspieszenia w kierunkach poziomym i pionowym:

$$a_x = a_s\cos\alpha - a_d\sin\alpha,\quad a_y = -a_s\sin\alpha - a_d\cos\alpha.$$

Równania ruchu w kierunku poziomym i pionowym mają postać

$$T = ma_x, N - mg = ma_y,$$

stąd szukana siła tarcia

$$T = 3mg\sin\alpha\,(\cos\alpha - 2/3)\,,$$

siła nacisku

$$N = 3mg\cos\alpha\,(\cos\alpha - 2/3)\,.$$

Pręt przestanie naciskać na podłogę, gdy $\cos\alpha_0 = 2/3$, $\alpha_0 = 48^o$.

Poślizg nie wystąpi dla kątów $\alpha < \alpha_0$, gdy współczynnik tarcia spełnia warunek

$$\mu > T/N = tg\alpha_0 = \sqrt{5}/2.$$

733. Oznaczmy natężenia prądu na elementach obwodu ADB, AEB i ACB przez I_1, I_2, I_3, a siły elektromotoryczne indukcji przez ε_1, ε_2, ε_3. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że prąd w przewodniku kołowym płynie przeciwnie do wskazówek zegara. Zachodzą związki: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, $R_1/(R_1+R_2) = \varepsilon_1/\varepsilon$ (z symetrii problemu) oraz $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ (pole magnetyczne nie przenika przez obszar ograniczony konturem ACBD).

Równania Kirchhoffa dla obwodu elektrycznego przedstawionego na rysunku 3 są takie same jak dla układu na rysunku 1. Mają one postać:

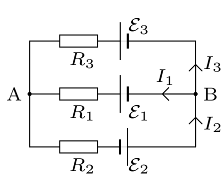
$$\varepsilon - R_2I_2 - R_1I_1 = 0,\quad R_1I_1 = R_3I_3,\quad I_2 = I_1 + I_3.$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy natężenia prądu, w szczególności

$$I_1 = \varepsilon R_3/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3).$$

Szukana różnica potencjałów między punktami A i B dana jest wzorem

$$V_A - V_B = \varepsilon_1 - R_1I_1 = \varepsilon {R_1}^2R_2/(R_1+R_2)\,(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3).$$



Rys. 3

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.