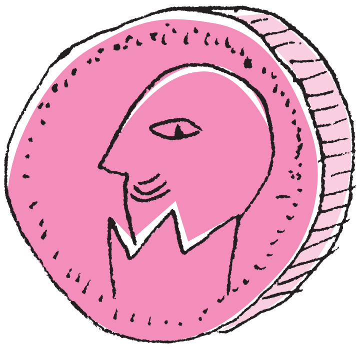
Jak rzucić monetą, której nie ma?

*Stanisław CICHOMSKI**

* Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rzut monetą jest jedną z najstarszych metod podejmowania decyzji i rozstrzygania sporów. Jeśli stoisz na rozstaju dróg i nie wiesz, dokąd iść, ale musisz wybrać – *w lewo czy w prawo?* – rzut monetą może być całkiem rozsądnym rozwiązaniem. Cóż z tego, skoro moneta, którą trzymasz w kieszeni, zupełnie się do tego nie nadaje... Potrzebujesz przecież monety symetrycznej, takiej, której awers i rewers wypadają z równym prawdopodobieństwem. Twój dukat na symetryczny nie wygląda: z jednej strony wybito krzywego orła, druga przedstawia podobiznę łysego króla.

Załóżmy zatem, że szansa na wyrzucenie orła wynosi p, gdzie $p \in (0,1)$ jest pewną nieznaną stałą. **Czy istnieje procedura, która w oparciu o serię rzutów naszym dukatem pozwoli nam decydować, czy skręcić w lewo, czy w prawo – z równymi prawdopodobieństwami?** Czy korzystając z monety o nieznanym wyważeniu, da się zasymulować rzut monetą idealnie symetryczną?

Przez $D_1, D_2, D_3, \ldots$ oznaczmy kolejne rzuty dukatem. Niech O (orzeł) i R (reszka) będą możliwymi wynikami pojedynczego rzutu. Zakładamy naturalnie, że wszystkie rzuty są niezależne, skąd np.

$$\mathbb{P}\big(O,O,R,O,R\big) = \mathbb{P}(D_1 = O)^3 \cdot \mathbb{P}(D_1 = R)^2 = p^3(1-p)^2.$$

Prawdopodobieństwo ustalonego ciągu zależy od liczby występujących w nim orłów, ale nie zależy już od ich kolejności. W poszukiwaniu symetrii przyjrzyjmy się podwójnemu rzutowi (D_1, D_2):

$\mathbb{P}$	$D_2 = O$	$D_2 = R$
$D_1 = O$	p^2	$p(1-p)$
$D_1 = R$	$(1-p)p$	$(1-p)^2$

Choć $p \in (0,1)$ jest nieznane, to niewątpliwie $\mathbb{P}(O,R) = \mathbb{P}(R,O)$, i mamy:

$$\mathbb{P}\big(O,R \,\big|\, D_1 \neq D_2\big) = \frac{\mathbb{P}(O,R)}{\mathbb{P}(D_1 \neq D_2)} = \frac{p(1-p)}{p(1-p)+(1-p)p} = \frac{1}{2},$$

tzn. szanse na wyrzucenie (O,R) i (R,O), pod warunkiem $D_1 \neq D_2$, są takie same! Szukana procedura jest więc bardzo prosta – rzucamy dwoma dukatami (lub jednym dwukrotnie) aż do pierwszego momentu, gdy uzyskamy dwa różne wyniki:

1. niech $i = \min\{j \geqslant 1 : \ D_{2j-1} \neq D_{2j}\}$,
2. (a) jeśli $(D_{2i-1}, D_{2i}) = (O,R)$, skręć w **lewo**,
   (b) jeśli $(D_{2i-1}, D_{2i}) = (R,O)$, skręć w **prawo**.

Odnotujmy, że $\mathbb{P}(i < \infty)$ wynosi oczywiście 1, czyli na pewno prędzej czy później będziemy w stanie podjąć decyzję. □

Powyższą zagadkę wymyślił i spopularyzował genialny John von Neumann. Problem spodobał się niesłychanie – dziś rozrósł się w multum egzotycznych odmian, znanych zbiorczo pod hasłem *Fabryka Bernoulliego*. Niech $f : (0,1) \to [0,1]$ będzie ustaloną funkcją. *Fabryką Bernoulliego* funkcji f nazywamy każdą procedurę, która korzystając z ciągu niezależnych rzutów (*zmiennych Bernoulliego*) $D_1, D_2, D_3, \ldots$, gdzie

$$\mathbb{P}(D_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(D_i = 0) = p, \quad \text{dla } i = 1,2,3,\ldots,$$

produkuje nową monetę (*zmienną*) M, o rozkładzie

$$\mathbb{P}(M = 1) = 1 - \mathbb{P}(M = 0) = f(p),$$

dla każdego wyboru $p \in (0,1)$. Zagadce von Neumanna odpowiada po prostu funkcja stała $f \equiv \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie zadania M 1711.
Niech $k = \frac{n}{d}$, $k' = \frac{n}{d'}$, gdzie $k > k'$. Wtedy

$$k^2 > (k+1)(k-1) \geqslant (k+1)k',$$

więc $\frac{1}{k'} > \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$. Wobec tego

$$d' = \frac{n}{k'} > \frac{n}{k} + \frac{n}{k^2} = d + \frac{d^2}{n},$$

co było do pokazania.

Rozwiązanie zadania M 1712.
„Wędrujmy” po sektorach w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. W pewnym momencie, tuż za niebieskim sektorem N, znajduje się czerwony sektor C. Bez straty ogólności możemy założyć, że n jest liczbą zapisaną w sektorze N. Niech liczba k będzie zapisana w sektorze C.

Rozważmy grupę k sektorów, patrząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zaczynając od C. Niech wśród nich będzie a niebieskich i b czerwonych sektorów. Niebieskie sektory zawierają liczby $1, 2, \ldots, a$ zaś czerwone zawierają liczby $k, k-1, \ldots, k-(b-1)$. Ponieważ $a + b = k$, to $k - (b-1) = a + 1$, a to oznacza, że sektory te zawierają każdą z liczb od 1 do k dokładnie raz.

Rozważmy teraz grupę $n - k$ sektorów, patrząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zaczynając od sektora N. Niech wśród nich będzie c niebieskich i d czerwonych sektorów. Liczby w niebieskich sektorach to kolejno $n, n-1, \ldots, n-(c-1)$, a liczby w czerwonych sektorach to odpowiednio $k+1, k+2, \ldots, k+d$. Z równości $c + d = n - k$, podobnie jak wyżej, wnioskujemy, że każda z liczb od $k+1$ do n występuje dokładnie raz. Połączenie tych dwóch grup daje nam szukany półokrąg.

Zadanie 1. Zaprojektuj *fabrykę Bernoulliego* dla:

(a) $f(p) = 1 - p$,
(b) $f(p) = p^2 - 3p^3 + 3p^4 - p^5$,
(c) $f(p) = \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$,
(d) $f(p) = \frac{1}{1+p}$.

Wskazówka do (d): $\frac{1}{1+p} = 1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - \ldots$

Nie należy sądzić, by wszystkie zadania tego typu były równie proste. Znalezienie odpowiedniej procedury wymaga czasem odrobiny szczęścia i niebagatelnej pomysłowości. Jako dobry przykład rozpatrzmy teraz przypadek fabryki Bernoulliego, którą Santosh Vempala zaprojektował dla funkcji $f(p) = \sqrt{p}$.

Na dobry początek zacznijmy od przedstawienia $f(p)$ w formie wyrobu wielomianopodobnego: rozwijając $\sqrt{p}$ w szereg Taylora wokół punktu $p_0 = 1$, dla $p \in (0,1)$ dostajemy tożsamość

$$(*) \qquad \sqrt{p} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2^{2n+1}} (1-p)^{n+1},$$

gdzie $C_n := \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$ (dla $n = 0$ mamy $C_0 = 1$). Początkowe wartości ciągu C_n to:

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ 4862,\ 16796,\ \ldots$$

Szczęśliwy traf polega na tym, że $(C_n)_{n\geqslant 0}$ to tzw. ciąg liczb Catalana, który pojawia się naturalnie w rozmaitych problemach kombinatorycznych dotyczących zliczania. W naszym przypadku pomocna będzie następująca charakteryzacja, której uzasadnienie można znaleźć w artykule Joanny Jaszuńskiej *Drogi w kratach i kino* (Δ^{01}_{14}).

Istnieje dokładnie C_n takich ciągów binarnych długości $2n$, w których:

a) *występuje po równo n zer i n jedynek,*
b) *w każdym początkowym podciągu występuje nie mniej jedynek niż zer.*

Przykład ciągu binarnego spełniającego a) i b) ($n = 5$):

1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0.

I cóż z tego wynika? Otóż... clou programu polega na tym, by teraz chytrze zinterpretować prawą stronę $(*)$. Rozważmy następujący eksperyment: rzucamy *symetryczną* monetą tak długo, aż łączna liczba wyrzuconych orłów po raz pierwszy przekroczy liczbę wyrzuconych reszek – liczba orłów i reszek różni się wtedy o 1, skąd liczba wykonanych rzutów musi być nieparzysta. Szansa, że zdarzenie to zrealizuje się w $(2n+1)$-szym rzucie, wynosi zatem dokładnie $C_n \cdot 2^{-(2n+1)}$.

I to jest już prawie koniec – należy jeszcze sprytnie zauważyć, że rzucać symetryczną monetą nauczyliśmy się na samym początku! Niezawodna fabryka wygląda więc następująco:

1. Rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż łączna liczba wyrzuconych orłów po raz pierwszy przekroczy liczbę wyrzuconych reszek; oznaczmy liczbę wykonanych rzutów przez τ.
2. Niech $\tau = 2n+1$ (τ jest nieparzyste); wykonujemy $n+1$ rzutów krzywym dukatem:
$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n,\ D_{n+1},$$
   (a) jeśli $\max_{1\leqslant i\leqslant n+1} D_i = 0$ (wypadły same reszki), **zwróć** $M = 0$,
   (b) jeśli $\max_{1\leqslant i\leqslant n+1} D_i = 1$ (wypadł choć jeden orzeł), **zwróć** $M = 1$.

Dlaczego ten algorytm działa? Cóż, możemy wszakże rozpisać:

$$\mathbb{P}(M=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(M=0 \mid \tau = 2n+1\big)\mathbb{P}\big(\tau = 2n+1\big) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{n+1} \frac{C_n}{2^{2n+1}},$$

skąd $\mathbb{P}(M=1)$ jest równe prawej stronie $(*)$. $\square$

Kluczowym elementem poprzedniej konstrukcji było wielokrotne użycie triku von Neumanna. Skoro umiemy symulować rzut monetą symetryczną, to o następnych problemach możemy już myśleć tak, jakbyśmy taką właśnie monetę też już mieli w kieszeni.

Okazuje się, że można dokładnie scharakteryzować wszystkie te funkcje, dla których *Fabryka Bernoulliego* istnieje. Matematycy Michael S. Keane i George L. O'Brien pokazali bowiem, że rozwiązanie dla funkcji $f : (0,1) \to [0,1]$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ona następujące dwa warunki:

1. f jest ciągła,
2. f jest stała **lub** istnieje taka liczba całkowita n, że
$$\min\big\{f(p), 1-f(p)\big\} \geqslant \min\big\{p^n, (1-p)^n\big\},$$
   dla wszystkich $p \in (0,1)$.

W szczególności, funkcje $f(p)$ zadane wzorem

$$\frac{1}{\pi},\quad \sqrt[3]{p},\quad \cos(p),\quad e^{-p},\quad \log(1+p)$$

są wszystkie symulowalne (!) Z drugiej wszak strony, funkcji tak prostej jak

$$f(p) = \min\{1, 2p\}$$

nijak wyprodukować się nie da.