Biorąc pod uwagę relatywnie małe odległości (w stosunku do promienia Ziemi), zamiast d możemy użyć AB. Rzeczywiście $d = \mathrm{tg}(\frac{AB}{r})r \approx 23{,}4101$ km, a więc $d \approx AB$.

Aby obliczyć h, musimy teraz obliczyć d. Ponieważ znamy r i (długość łuku) AB, mianowicie: 23,41 km, jest to bardzo proste. Rzeczywiście $\alpha = \frac{AB}{2\pi r} \cdot 2\pi = \frac{AB}{r}$, a więc $d = \mathrm{tg}\big(\frac{AB}{r}\big)r$. Zatem

$$h = r\left(-1 + \sqrt{\mathrm{tg}^2\left(\frac{AB}{r}\right) + 1}\right).$$

Dla $r = 6371$ km i $AB = 23{,}41$ km otrzymujemy $h \approx 0{,}0430098$ km, czyli około 43 metry. Ponieważ $43/(92/26) \approx 12{,}15$, wnioskujemy, że morze widać już z trzynastego piętra Pontsteigera.

Proste obliczenia zostały wykonane przy użyciu Wolfram Alpha, `https://www.wolframalpha.com/`.

W tym rozumowaniu przyjęliśmy dwa niewinne założenia. Po pierwsze, że budynek leży na poziomie morza. Jest to uzasadnione, gdyż stoi on prawie na poziomie Kanału Morza Północnego. Poza tym założyliśmy również, że Ziemia jest idealną sferą.

Interesującym aspektem równania $(*)$ jest, że możemy je również użyć do ustalenia r, promienia Ziemi. Mianowicie: załóżmy teraz, że znamy wysokość h i długość stycznej d. Z $(*)$ otrzymujemy

$$r = \frac{d^2 - h^2}{2h}.$$

Ten genialnie prosty sposób obliczenia promienia Ziemi został zaproponowany przez arabskiego uczonego Al-Biruni około tysiąca lat temu. Dokładniej, zamiast obliczyć d, Al-Biruni obliczył, używając astrolabium, kąt β pomiędzy styczną d do horyzontu i pionową linią poprowadzoną ze szczytu góry. Ponadto aby obliczyć wysokość h wzgórza, porównał on kąty jego elewacji z dwóch miejsc i obliczył odległość między tymi punktami. Ponieważ

$$\sin(\beta) = \frac{r}{r+h},$$

dostajemy wtedy

$$r = \frac{h\sin(\beta)}{1-\sin(\beta)}.$$

W ten sposób Al-Biruni obliczył promień Ziemi z błędem zaledwie 2%.

Sparavigna, Amelia (2013). *The Science of Al-Biruni*. International Journal of Sciences. 2 (12): 52–60. arXiv:1312.7288. doi:10.18483/ijSci.364.

Możemy odtworzyć jego osiągnięcie, prosząc administratora Pontsteigera, aby powiedział nam, z którego piętra mieszkańcy budynku mogą już widzieć morze. Ustaliliśmy wcześniej, że są to mieszkańcy trzynastego piętra. Trzynaste piętro zaczyna się na wysokości $h = 12 \cdot 92/26$ metrów, a więc około 42,46 metra. Wstawiając w ostatnim równaniu $h = 0{,}04246$ km i $d = 23{,}41$ km, otrzymujemy $r \approx 6453{,}44$ km, wartość, która różni się od prawidłowej odpowiedzi raptem o 1%.

Trzecie zastosowanie równania $(*)$ polega na obliczeniu d, gdy znamy h i r. Zilustrujemy je, ustalając, jak daleko widać ze szczytu Pontsteigera do horyzontu w kierunku morza. Z $(*)$ otrzymujemy

$$d = \sqrt{2rh + h^2}.$$

Dla $r = 6371$ km i $h = 0{,}092$ km otrzymujemy $d \approx 34{,}2385$ km.

Abstract nonsense, czyli teoria kategorii

*Robert SZAFARCZYK**

*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyrażenie *abstract nonsense* jest używane do opisu dowodów twierdzeń spoza teorii kategorii, ale wykorzystujących wyłącznie jej metody.

Teoria kategorii, która jest tematem tego artykułu, ma dość nietypowe w matematyce zastosowanie. Właściwie można powiedzieć, że nie jest to wcale teoria; nie jest to odrębny obszar badań, w którym można się wyspecjalizować, zapominając o reszcie matematyki. Teoria kategorii jest pewnego rodzaju językiem, uniwersalną „mową" matematyczną, która pozwala (mniej lub bardziej) połączyć te wszystkie porozrzucane dziedziny matematyczne w jakąś całość.

Zacznijmy od tego, czym jest ta kategoria.

Definicja 1 (Kategoria)**.** *Kategoria składa się z obiektów i morfizmów. Morfizmy wyobrażamy sobie jako strzałki idące od obiektu do obiektu, czyli morfizm f z obiektu A do obiektu B narysujemy tak:*

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Oczywiście każda strzałka ma dokładnie jeden początek i dokładnie jeden koniec.

Ponadto morfizmy można składać. Gdy dwa morfizmy f, g są takie, że pierwszy kończy się tam, gdzie drugi zaczyna, to automatycznie otrzymujemy trzeci morfizm, który nazywamy ich złożeniem i oznaczamy $f \cdot g$ (uwaga: równie często w literaturze spotyka się oznaczenie $g \circ f$).

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f\cdot g"'] & \end{tikzcd}$$

Kategoria jest trochę jak mapa samochodowa, są na niej miasta i drogi. Planując wycieczkę z miasta A do miasta B, możemy podróżować drogą f. Jeśli chcemy potem pojechać z B do C drogą g, to możemy to zrobić, nazywając całą podróż $f \cdot g$. Ponadto w każdym mieście możemy się zatrzymać na zwiedzanie rynku, co nie zmienia w żaden sposób trasy wycieczki $1_A \cdot f = f = f \cdot 1_B$.

Dla danych składalnych morfizmów istnieje dokładnie jedno złożenie; morfizmów, które nie są składalne, nie można składać; ponadto zachodzi $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$ (czyli możemy pisać po prostu $f \cdot g \cdot h$). Ostatnią własnością potrzebną, by kategoria była kategorią, jest to, że każdy obiekt (dla ustalenia uwagi A) musi posiadać morfizm $1_A : A \to A$ zwany identycznością i spełniający dla dowolnych $f : A \to B$ i $g : C \to A$ tożsamości $1_A \cdot f = f$ oraz $g \cdot 1_A = g$.

Przykład 1. Poniższe struktury tworzą kategorię:
- jeden obiekt i identyczność: $\begin{tikzcd} A \arrow[loop right, "1_A"] \end{tikzcd}$;
- jeden obiekt i morfizmy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ takie, że
$$f_m \cdot f_n = f_{m+n}: \quad \begin{tikzcd} A \arrow[loop right, "f_n"] \end{tikzcd}.$$

Poniższe struktury **nie** tworzą kategorii:
- trzy obiekty z identycznościami i dwa morfizmy:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "1_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "1_B"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[loop above, "1_C"] \end{tikzcd}$$
(brakuje złożenia $f \cdot g$);
- jeden obiekt i morfizmy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ takie, że
$$f_m \cdot f_n = f_{m-n}: \quad \begin{tikzcd} A \arrow[loop right, "f_n"] \end{tikzcd}$$
(brakuje identyczności).

Jak na uniwersalną mowę matematyczną, która (według autora) ma pozwolić na sformalizowany opis całej matematyki, to na pierwszy rzut oka nie wygląda to zbyt obiecująco. Strzałki i kropki nie pojawiają się w matematyce zbyt często, no chyba że w teorii grafów. Mimo to nie traćmy nadziei i spróbujmy coś z tej definicji wywnioskować.

Lemat 1. *Każdy obiekt ma dokładnie jedną identyczność.*

Dowód. Z definicji kategorii wiemy, że każdy obiekt ma co najmniej jedną identyczność. Trzeba więc pokazać, że nie może mieć ich więcej. Załóżmy nie wprost, że jest jakiś obiekt A, który oprócz 1_A ma jeszcze jedną identyczność $i : A \to A$ nierówną 1_A. Wówczas 1_A i i są składalne, więc zachodzi $i = i \cdot 1_A$ (bo 1_A jest identycznością) oraz $i \cdot 1_A = 1_A$ (bo i jest identycznością). Ale to znaczy, że $i = 1_A$, co jest sprzeczne z naszym założeniem. □

Teoria kategorii ma to do siebie, że robi się tym ciekawsza, im bogatszy jest wachlarz „słów”, jakimi jesteśmy w stanie operować. Wprowadźmy więc nową definicję.

Definicja 2 (Monomorfizm)**.** *Morfizm $m : A \to B$ nazywamy monomorfizmem, jeśli dla dowolnego obiektu C i morfizmów $f, g : C \to A$ z równości $f \cdot m = g \cdot m$ wynika $f = g$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] & B \\ C \arrow[u, shift left, "f"] \arrow[u, shift right, "g"'] \arrow[ur, "f\cdot m = g\cdot m"'] & \end{tikzcd} \implies \quad f = g$$

Czyli monomorfizmy to morfizmy posiadające pewną dodatkową własność. Poniżej zostawiam Czytelnikom do udowodnienia fakt ukazujący, że znamy już pewną klasę monomorfizmów.

Zadanie 1. *Identyczności są monomorfizmami.*
Tymczasem my udowodnimy poniższy lemat.

Lemat 2. *Niech $m : A \to B$ i $n : B \to C$ będą monomorfizmami. Wówczas ich złożenie $m \cdot n : A \to C$ również jest monomorfizmem.*

Dowód. Weźmy dowolne D oraz $f, g : D \to A$, takie że $f \cdot m \cdot n = g \cdot m \cdot n$. Chcemy wywnioskować, że $f = g$. Mamy diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] & B \arrow[r, "n"] & C \\ D \arrow[u, shift left, "f"] \arrow[u, shift right, "g"'] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

Możemy go przerysować jako:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "n"] & C \\ D \arrow[u, shift left, "f\cdot m"] \arrow[u, shift right, "g\cdot m"'] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

więc korzystając z tego, że n jest monomorfizmem, dostajemy $f \cdot m = g \cdot m$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] & B \\ D \arrow[u, shift left, "f"] \arrow[u, shift right, "g"'] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A stąd wynika już, że $f = g$, bo m jest monomorfizmem. □

No to teraz cała ta teoria kategorii stała się wręcz niepoważna. Ten „dowód” przypomina bardziej zabawę w łączenie kropek niż inteligentny wywód przyczynowo-skutkowy. Nadszedł więc moment, w którym, by zachować przyzwoitość tekstu bądź co bądź matematycznego, muszę niezwłocznie ujawnić sekret przydatności teorii kategorii. A mianowicie: wszystko, co w matematyce interesujące, tworzy kategorię. A oto dowód (empiryczny):

Na przykład ze zbioru dwuelementowego do trójelementowego istnieje $3^2 = 9$ morfizmów. Z kolei morfizmów ze zbioru jednopunktowego do dowolnego innego zbioru jest tyle, ile ma on elementów.

Definicja 3 (Kategoria zbiorów)**.** *Oznaczamy przez* **Set** *kategorię, w której:*
- *obiektami są zbiory,*
- *morfizmami są funkcje,*
- *składanie jest składaniem funkcji,*
- *identycznościami są funkcje identycznościowe* ($x \mapsto x$)*.*

Uważny Czytelnik powinien w tym momencie sprawdzić, że **Set** rzeczywiście spełnia wszystkie warunki bycia kategorią.

Pisząc „wszystko tworzy kategorię”, nie miałem na myśli tylko zbiorów, każda porządna struktura matematyczna ma swoją kategorię. Istnieje więc kategoria grup, grafów, przestrzeni topologicznych, funkcji różniczkowalnych, a nawet kategoria wszystkich kategorii.

Bardzo ważną rzeczą, wręcz kluczową, jest to, że tworząc kategorię zbiorów, tak naprawdę zapominamy, czym zbiory są. Obiekty w **Set** to tylko punkty (bez elementów, bez informacji), morfizmy to tylko strzałki. Jedyna informacja, jaką mamy, to jak dany morfizm składa się z innymi morfizmami (o których również wiemy tylko to, jak składają się z innymi morfizmami...). Wydawałoby się więc, że pozbyliśmy się wszystkiego, co istotne z teorii zbiorów, i dostaliśmy coś kompletnie z nią niezwiązanego. Wprost przeciwnie.

Twierdzenie 1. *Funkcja jest injektywna (różnowartościowa) wtedy i tylko wtedy, gdy jest monomorfizmem w* **Set***.*

Dowód. Najpierw sprawdźmy, że jeśli f jest funkcją injektywną ze zbioru X do Y, to spełnia własność monomorfizmu. Weźmy dowolny zbiór Z oraz dwie funkcje $g, h : Z \to X$ spełniające $g \cdot f = h \cdot f$. Wówczas dla dowolnego $z \in Z$ mamy $f(g(z)) = (g \cdot f)(z) = (h \cdot f)(z) = f(h(z))$, czyli z różnowartościowości funkcji f dostajemy $g(z) = h(z)$, co oznacza $g = h$.

Teraz załóżmy, że funkcja f z X do Y spełnia własność monomorfizmu. Chcemy pokazać, że jest injektywna. Weźmy dowolne $x_0, x_1 \in X$ spełniające $f(x_0) = f(x_1)$. Oznaczmy przez $*$ obiekt w **Set** odpowiadający pewnemu zbiorowi jednoelementowemu (ten jedyny element również nazwijmy $*$) i zdefiniujmy funkcje $g_0, g_1 : * \to X$ w ten sposób, że $g_0(*) = x_0$, a $g_1(*) = x_1$. Wówczas mamy $(g_0 \cdot f)(*) = f(g_0(*)) = f(x_0) = f(x_1) = f(g_1(*)) = (g_1 \cdot f)(*)$, czyli $g_0 \cdot f$ zgadza się z $g_1 \cdot f$ na wszystkich elementach $*$. Morfizmy te są równe, a skoro f jest monomorfizmem, to również $g_0 = g_1$, co oznacza, że $x_0 = x_1$. □

Jeszcze bardziej magiczne jest to, że ogromną liczbę własności i konstrukcji matematycznych można uogólnić na dowolną kategorię. Na przykład konstrukcję produktu kartezjańskiego zbiorów można opisać kategoryjnie. Wówczas, jak można się spodziewać, przyjmuje ona postać produktu grup w kategorii grup, produktu pierścieni w kategorii pierścieni itd. Ale, sprytnie dobierając kategorię, można też powiedzieć, że produktami są pojęcia takie, jak $A \cap B$, $p \wedge q$, $\mathrm{NWD}(m, n)$ czy $\min(x, y)$.

Stało się coś magicznego. Okazało się, że dla zbiorów definicja funkcji injektywnej pokrywa się z definicją monomorfizmu. A mimo to ciężko sobie wyobrazić dwie równie niepodobne do siebie definicje. Jedna jest lokalna, mówi o dwóch zbiorach, ich elementach i jednej funkcji między nimi. Druga wprost przeciwnie, wykorzystuje całą kategorię, wszystkie zbiory i wszystkie funkcje.

Pokazaliśmy już metodą *abstract nonsense*, że złożenie dwóch monomorfizmów jest monomorfizmem. Dostajemy więc „za darmo” poniższy prosty fakt.

Wniosek. *Złożenie dwóch funkcji injektywnych jest funkcją injektywną.*

W taki właśnie sposób działa teoria kategorii. Pozwala uprawiać matematykę jeden poziom abstrakcji wyżej. Jeśli udowodnimy coś dla wszystkich kategorii, to możemy to zastosować dla każdej z nich (dla zbiorów, grup, pierścieni, nawet jeśli nie wiemy, czym one są). Jedno twierdzenie abstrakcyjne jest warte nieskończenie wielu twierdzeń szczególnych.

Jeśli więc Czytelnik miałby ochotę za jednym zamachem rozwiązać nieprzeliczalnie wiele zadań matematycznych (bijąc tym na pewno jakiś rekord Guinnessa), to poniżej jest ku temu okazja.

Zadanie 2. *Niech $f : A \to B$, $g : B \to C$ będą dowolnymi morfizmami. Pokazać, że jeśli $f \cdot g$ jest monomorfizmem, to f jest monomorfizmem. Czy g też musi być monomorfizmem?*

Zadanie 3. *Skonstruować skończoną kategorię, w której dokładnie połowa morfizmów jest monomorfizmami.*

Zadanie 4. *Definiujemy kategorię $\mathbb{N}$. Jej obiektami są wszystkie liczby naturalne, a morfizmami relacja $\leqslant$ (strzałka $m \to n$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $m \leqslant n$). Sprawdzić, że $\mathbb{N}$ rzeczywiście tworzy kategorię.*

Rozwiązanie zadania M 1713.
Niech P' będzie punktem leżącym na krótszym łuku CB okręgu Ω tak, że $BP' = PD$. Wtedy czworokąt $PDP'B$ jest trapezem równoramiennym, skąd $PP' = BD$. Ponadto z tego, że $P'B = PD$, $DM = BN$ oraz $\sphericalangle P'BN = \sphericalangle PDM$ (co wynika wprost z wyboru P') wnosimy, że trójkąty PDM oraz $P'BN$ są przystające.
W szczególności $NP' = MP$. Wobec tego z nierówności trójkąta dla PNP' mamy: $PN + NP' \geqslant PP'$, czyli $PN + PM \geqslant BD$.