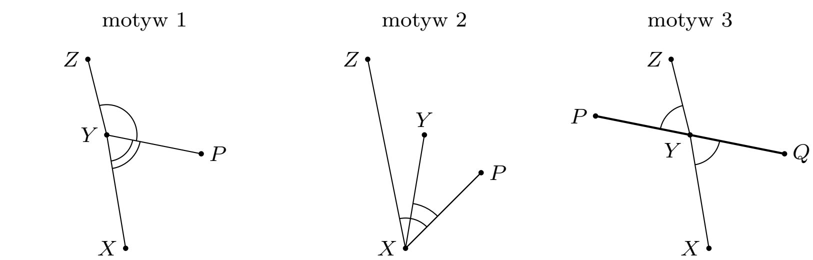
KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 41

Współliniowość i kąty

Bartłomiej BZDĘGA

Zacznę od trzech prostych motywów, na których opierają się zadania z bieżącego kącika (w trzecim punkt Y leży na odcinku PQ).

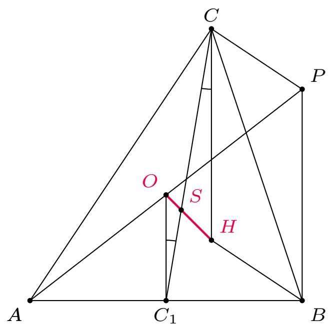


X, Y, Z są współliniowe $\iff$ $|\sphericalangle PYX| + |\sphericalangle PYZ| = 180^\circ$

X, Y, Z są współliniowe $\iff$ $|\sphericalangle PXY| = |\sphericalangle PXZ|$

X, Y, Z są współliniowe $\iff$ $|\sphericalangle XYQ| = |\sphericalangle ZYP|$

A oto zastosowanie motywu 3 w dowodzie twierdzenia o prostej Eulera (inny dowód, wykorzystujący jednokładność, pokazałem w 22. kąciku (Δ^{10}_{20}); ten jest znacznie bardziej elementarny). Standardowo przez H, O, S oznaczamy odpowiednio ortocentrum, środek okręgu wpisanego i środek ciężkości trójkąta ABC, niech ponadto C_1 będzie środkiem odcinka AB.



Wybierzmy taki punkt P, by czworokąt $CHBP$ był równoległobokiem. Wtedy $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle ACP| = 90^\circ$, więc AP jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, w szczególności punkt O jest środkiem odcinka AP. Ponadto punkt C_1 jest środkiem odcinka AB, więc C_1O jest odcinkiem środkowym w trójkącie ABC, czyli $|C_1O| = \frac{1}{2}|BP| = \frac{1}{2}|CH|$. Z własności środkowych mamy $|C_1S| = \frac{1}{2}|CS|$, a z równoległości $OC_1 \parallel HC$ (obie proste są prostopadłe do prostej AB) mamy $|\sphericalangle OC_1S| = |\sphericalangle HCS|$. Z powyższych rozważań wynika, że trójkąt OC_1S jest podobny do trójkąta HCS, więc $|\sphericalangle C_1OS| = |\sphericalangle CHS|$. Na mocy motywu trzeciego dowodzi to współliniowości punktów O, S, H.

Piękne zastosowanie motywu 2 można znaleźć w 82. *Deltoidzie* Joanny Jaszuńskiej (Δ^{10}_{15}), w dowodzie twierdzenia o prostej Simsona.

Zadania.

1. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Odcinek AP jest średnicą okręgu o_1, a odcinek AQ – okręgu o_2. Wykazać, że punkty B, P, Q leżą na jednej prostej.
2. Odcinek AB jest częścią wspólną siedmiokątów foremnych $ABCDEFG$ i $BAHIJKL$. Wykazać, że punkty oznaczone samogłoskami są współliniowe.
3. Częścią wspólną kwadratów $ABCD$ i $DEFG$ jest odcinek DG, zawarty w odcinku AD. Okręgi opisane na tych kwadratach przecinają się w punkcie $P \neq D$. Udowodnić, że punkty C, G, P leżą na jednej prostej.
4. Prosta ℓ oraz okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie T. Okrąg o, przechodzący przez punkt T, przecina prostą ℓ oraz okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio P, K i L, różnych od T. Proste PK i PL przecinają po raz drugi okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio A i B. Wykazać, że punkty A, B i T leżą na jednej prostej.
5. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Punkty K i L leżą na odcinkach odpowiednio BD i DF, przy czym $|BK| = |DL| = |AB|$. Udowodnić, że punkty C, K, L leżą na jednej prostej.
6. Środek S okręgu ω leży na okręgu o. Wspomniane okręgi przecinają się w dwóch punktach, jednym z nich jest A. Punkt P wybrano na okręgu o w ten sposób, by odcinek PS przecinał okrąg ω w punkcie B. Symetralna odcinka BP przecina okrąg o w punkcie C, leżącym po innej stronie prostej BP niż punkt A. Dowieść, że punkty A, B, C są współliniowe.
7. Równoległobok $ABCD$ ma kąt ostry przy wierzchołku A. Punkt P leży na odcinku CD. Prosta BP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $Q \neq B$. Okręgi opisane na trójkątach ABC i DPQ przecinają się w punkcie $R \neq Q$. Wykazać, że punkty A, D, R leżą na jednej prostej.

Wskazówki do zadań

1. Kąty PBA i QBA są proste.
2. Na siedmiokątach można opisać okręgi. Kąt EAB jest wpisany, oparty na $\frac{3}{7}$ okręgu, a kąt BAI – na $\frac{4}{7}$ okręgu.
3. Dobrze jest przyjrzeć się kątom CPD i GPD.
4. Zastosować twierdzenie o stycznej i cięciwie. Trzeba rozważyć dwa przypadki. Jeśli okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie, to wykazujemy, że $|\sphericalangle ATB| = 180^\circ$ (motyw 1), jeśli wewnętrznie – to że $|\sphericalangle ATP| = |\sphericalangle BTP|$ (motyw 2).
5. Kąty DCK i DCL.
6. Za mgłą ukrywają się równości $|AS| = |BS|$ i $|BC| = |CP|$ oraz motyw 3.
7. Można udowodnić, operując odpowiednio twierdzeniem o kącie wpisanym, że $|\sphericalangle CDR| = |\sphericalangle BAD|$. Są tu do rozważenia dwa przypadki – odcinki PQ i DR mogą się przecinać lub nie.