Losujemy liczbę Eulera

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W ostatnim odcinku poszukiwania liczby Eulera w matematyce (poprzednie dwa opublikowane są w Δ_{22}^{03} i Δ_{22}^{04}) przyjrzymy się problemowi losowania liczb z odcinka.

Rozważmy następujący problem z rachunku prawdopodobieństwa. Losujemy liczby z przedziału $[0,1]$ (i robimy to w sposób *jednostajny*, tzn. szansa na uzyskanie liczby z dowolnego odcinka $s \subseteq [0,1]$ jest równa długości s). Jaka jest wartość oczekiwana liczby losowań, po której suma uzyskanych liczb po raz pierwszy przekracza 1?

Przypomnijmy, co rozumiemy przez wartość oczekiwaną. Załóżmy, że wynik liczbowy w doświadczenia W otrzymany jest z prawdopodobieństwem $p(w)$ i że zbiór T możliwych wyników jest co najwyżej przeliczalny. W takim wypadku wartość oczekiwana $\mathbb{E}\,W$ to średnia ważona wyników z wagami równymi prawdopodobieństwom, a więc

$$\mathbb{E}\,W = \sum_{w \in T} w \cdot p(w).$$

Zaprezentujmy wyniki symulacji komputerowych. Każda z dziesięciu liczb poniżej to średnia z miliona powtórzeń opisanego wyżej eksperymentu:

2,71749, 2,719239, 2,719732, 2,717443, 2,716057,
2,716511, 2,717569, 2,717784, 2,71784, 2,717778.

Ponieważ otrzymane wyniki są bardzo bliskie liczbie e, pozostaje nam formalnie uzasadnić, że poszukiwana wartość średnia jest równa dokładnie e.

Formalizacja problemu. Liczba losowań z $[0,1]$ potrzebnych do przekroczenia 1 potencjalnie może być dowolnie duża; wyobraźmy sobie zatem, że nieskończenie wiele razy dokonaliśmy losowania, otrzymując liczby $X_1, X_2, X_3, \ldots$, a następnie szukamy najmniejszej liczby naturalnej N takiej, że $X_1 + X_2 + \ldots + X_N > 1$. Poszukiwana wartość oczekiwana liczby losowań jest zatem równa $\mathbb{E}\,N$, czyli

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,N = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot P(N=t) = P(N=1) &+ \\ &+ P(N=2) + P(N=2) + \\ &+ P(N=3) + P(N=3) + P(N=3) + \\ &+ \cdots = \\ &= P(N>0) + P(N>1) + P(N>2) + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N>k).\end{aligned}$$

W rozumowaniu obok zastosowaliśmy uproszczenie:

$$\begin{aligned}P(N>k) = P(N=k+1) &+ \\ + P(N=k+2) &+ \\ + P(N=k+3) &+ \cdots\end{aligned}$$

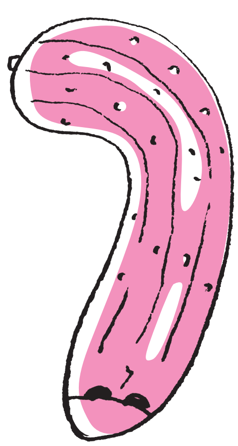
Zauważmy, że liczba losowań jest większa od k dokładnie wtedy, gdy $X_1 + \cdots + X_k < 1$. Tym samym

$$P(N>k) = P(X_1 + \cdots + X_k < 1).$$

Spróbujemy teraz obliczyć tę ostatnią wartość, nadając jej interpretację geometryczną.

Dla $k=1$ pytamy o $P(X_1 < 1)$, co oczywiście jest równe 1 (gdyż wartość X_1 została wylosowana z odcinka $[0,1]$). Dla $k=2$ sprawa się komplikuje – rozważamy bowiem $P(X_1 + X_2 < 1)$. Co możemy powiedzieć o losowym punkcie o współrzędnych (X_1, X_2)? Leży on oczywiście w kwadracie jednostkowym $[0,1]^2$. Ponieważ współrzędne były losowane niezależnie, więc szansa na to, że nasz losowy punkt wpadnie do dowolnie wybranego prostokąta $s_1 \times s_2 \subseteq [0,1]^2$, jest równa polu powierzchni tego prostokąta. Można stąd wywnioskować, że szansa na wpadnięcie naszego punktu do dowolnej figury $\mathcal{F} \subseteq [0,1]^2$ jest równa polu powierzchni figury $\mathcal{F}$. Wziąwszy pod uwagę nierówności $X_1, X_2 \geqslant 0$, zbiorowi $X_1 + X_2 < 1$ odpowiada trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$ i $(1,0)$, którego pole wynosi $\frac{1}{2}$, mamy zatem $P(X_1 + X_2 < 1) = \frac{1}{2}$. Podobnie dla $k=3$: szansa na wpadnięcie losowego punktu o współrzędnych (X_1, X_2, X_3) do zbioru określonego równaniem $X_1 + X_2 + X_3 < 1$ jest równa objętości ostrosłupa wyznaczonego przez punkty $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ i $(1,0,0)$, zatem $P(X_1 + X_2 + X_3 < 1) = \frac{1}{6}$.

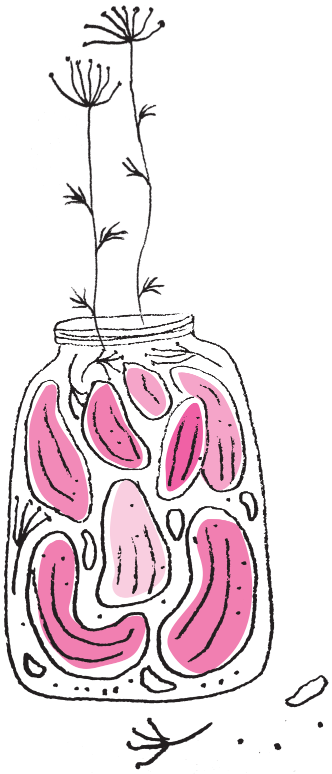
Przypadek ogólny sprowadza się do znalezienia w przestrzeni k-wymiarowej objętości bryły ograniczonej warunkami $x_1, \ldots, x_k \in [0,1]$ oraz $x_1 + \cdots + x_k < 1$.



Rozwiązanie zadania M 1709.
Zauważmy, że przy założeniach zadania

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2 &= 4ab,\\ (a-b+c)^2 &= 4ac,\\ (-a+b+c)^2 &= 4bc,\\ (a+b+c)^2 &= 4(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Wobec tego liczby $4ab$, $4bc$, $4ca$ oraz $4(ab+bc+ca)$ są kwadratami liczb całkowitych, co implikuje tezę zadania, gdyż 4 również jest kwadratem liczby całkowitej.



Objętość tej bryły jest równa $\frac{1}{k!}$. Trudno o formalne uzasadnienie tego wzoru bez obliczenia jakiejś całki. Przybliżmy go jednak, analizując $k = 3$. Objętość ostrosłupa to pole podstawy (pole trójkąta) razy trzecia część wysokości. Jeśli więc wszystkie boki (ramiona przy kącie prostym i wysokość figury) są równe 1, to jego objętość jest równa $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3!}$. Objętość czterowymiarowego ostrosłupa to „pole podstawy" (czyli objętość trójwymiarowego ostrosłupa) razy *czwarta* część wysokości. Jeśli ponownie wszystkie odpowiednie boki mają długość 1 (a tak jest w sympleksach), to objętość czterowymiarowego sympleksu to $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{4!}$. W przestrzeni k-wymiarowej objętość odpowiedniego k-wymiarowego ostrosłupa to „pole podstawy" będącej ostrosłupem $(k-1)$-wymiarowym razy k-ta część wysokości, czyli $\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k!}$.

Został jeszcze trywialny przypadek $k = 0$, czyli obliczenie $P(N > 0)$. Oczywiście jest to 1.

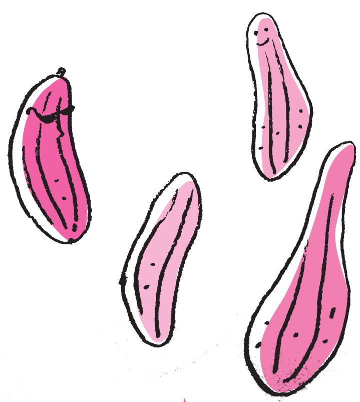
Mając już wszystkie elementy układanki, możemy dokończyć nasze obliczenia:

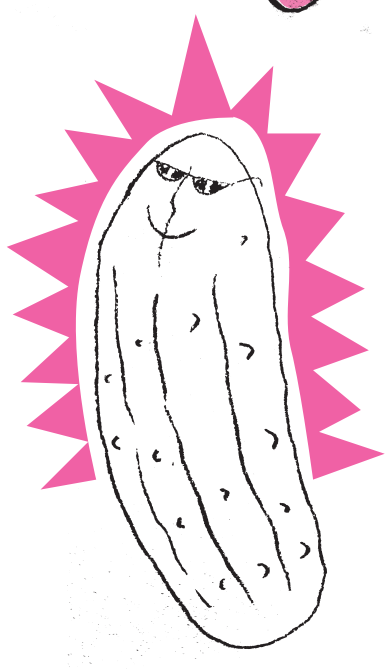
$$\mathbb{E}\, N = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Tym samym udało nam się obliczyć wartość dokładną, którą wcześniej odgadliśmy eksperymentalnie.

Na koniec przedstawmy jeszcze pewien stowarzyszony problem. Losujemy liczby z przedziału $[0, 1]$ i kończymy, gdy nowo wylosowana liczba jest mniejsza od poprzedniej. Ile średnio liczb wylosujemy? Odpowiedź na to pytanie to również liczba e. Rozwiązanie (podobne do powyższego) zostawiamy dla Czytelnika Zainteresowanego.

To już ostatnia część naszego krótkiego cyklu. Zaprezentowane zostały niektóre z ciekawszych wystąpień liczby e w matematyce. Czytelnika Zainteresowanego Tematem zachęcamy do poszukiwania innych doświadczeń lub zagadnień, które w niezwykły sposób ujawniają liczbę e.





De Rerum Metallica

Francesco PISTIS

Według Standardowego Modelu Kosmologicznego zwykła materia (wszystkie pierwiastki chemiczne i mniejsze cząstki subatomowe) stanowi jedynie 5% składu całego Wszechświata. Z tego ciężkich pierwiastków, z którymi mamy ciągły kontakt na Ziemi, jest znikomo mało, bo jedynie 0,1% (z tych 5%). Obficie występują tylko hel i wodór, które łącznie stanowią 99,9% zwykłej materii (procentowy rozkład składników Wszechświata pokazano na rysunku na następnej stronie). Dlatego Tablica Mendelejewa astronomów jest zdecydowanie mniej rozbudowana niż ta, którą znamy z zajęć chemii. Z tego też względu wszystkie pierwiastki, nie będące helem ani wodorem, astronomowie nazywają metalami. Ale jakie znaczenie mają te metale we Wszechświecie?

Zacznijmy od bardzo odległej historii Wszechświata. Podczas okresu ochładzania bezpośrednio po Wielkim Wybuchu najcięższym stabilnym pierwiastkiem, który mógł powstać, był lit. Cięższe pierwiastki wymagały dostarczenia znacznie więcej energii, której niestety jeszcze nie było. Taka ilość energii została wytworzona dopiero w późniejszym okresie w jądrach gwiazd, gdzie wyprodukowane zostały wszystkie pierwiastki, do żelaza włącznie. Jest to dobry