Twierdzenie Zeckendorfa: Jeżeli N jest liczbą naturalną, to N może być w sposób jednoznaczny przedstawione jako:

$$N = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F_{j+1}, \tag{4}$$

gdzie α_j równa się 0 lub 1, dla $j = 1, \ldots, m$, $\alpha_m = 1$, F_j są liczbami z ciągu Fibonacciego oraz jeżeli $\alpha_i = 1$, to $\alpha_{i+1} = 0$ dla $i = 1, \ldots, m-1$.

W sumie (4) występuje F_{j+1}, aby uniknąć dwóch 1. Reprezentacją Zeckendorfa liczby N nazywamy odpowiadający jej ciąg skończony α_1, α_2, …, α_m, np. dla liczby 1 jest (1), dla liczby 4 jest (1, 0, 1), dla liczby 6 jest (1, 0, 0, 1), dla liczby 12 jest (1, 0, 1, 0, 1). Reprezentacja Zeckendorfa określa kod Fibonacciego, który zamienia, w sposób jednoznaczny, każdą liczbę naturalną na skończony ciąg binarny. Kod Fibonacciego używany jest do kompresji danych, czyli wyrażenia tej samej informacji za pomocą mniejszej liczby bitów. W reprezentacji Zeckendorfa nigdy dwie jedynki nie mogą wystąpić obok siebie, stąd w kodzie Fibonacciego stosuje się dodatkową jedynkę na końcu ciągu, aby zaznaczyć w ten sposób koniec ciągu, czyli np. dla 4 będzie to 1011, a dla 6 – 10011.

Ciekawostką jest, że ten sam wynik co Zeckendorf otrzymał Cornelis Lekkerkerker (1922–1999) w roku 1952, czyli 20 lat przed Zeckendorfem, i opisał w pracy w języku holenderskim (Zeckendorf napisał swoją pracę po francusku).

Okazuje się, że dla uogólnionego ciągu G_n nie dla wszystkich a i b mamy odpowiednik reprezentacji Zeckendorfa, np. dla $a = -5$ i $b = 6$ nie ma – por. pracę L. Childersa i K. Gopalakrishnana.

Ciąg Fibonacciego i jego uogólnienia są dalej przedmiotem interesujących badań matematyków, a nawet jest wydawane specjalne pismo naukowe poświęcone tym badaniom – *The Fibonacci Quarterly* – związane z *The Fibonacci Association*.

Liczba Eulera przy obliczaniu NWW

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W poprzedniej części odkryliśmy liczbę Eulera w trójkącie Pascala. Tym razem spróbujemy sięgnąć do jednej z najciekawszych dziedzin matematyki – teorii liczb.

Najmniejsza wspólna wielokrotność

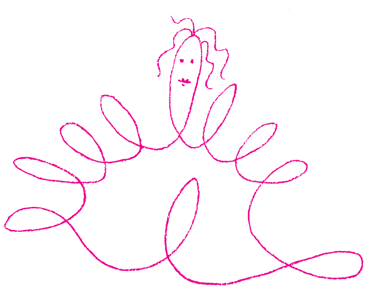
Niech $a_n = \sqrt[n]{\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, n)}$. Obliczając początkowe wyrazy tego ciągu, zauważmy, że są one zawsze „małe". Na przykład

$$a_{15} = 2{,}34665, \qquad a_{30} \approx 2{,}58368, \qquad a_{60} \approx 2{,}60879.$$

$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 15) = 360\,360$,
$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 30) = 2\,329\,089\,562\,800$,
$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 60) =$
$= 9\,690\,712\,164\,777\,231\,700\,912\,800$.

Zaskakujące jest jednak to, że wyrazy ciągu a_n tworzą bardzo przyjazny ciąg, jest on bowiem zbieżny do liczby Eulera!

W dalszej części zobaczymy jedno z możliwych uzasadnień tego faktu. Nie jest ono całkowicie elementarne, gdyż wykorzystuje twierdzenie o liczbach pierwszych (o nim również za chwilę napiszemy). Rozumowanie podzielimy na trzy etapy. Każdy z nich zawiera w sobie ciekawe rozważania na temat liczb oraz funkcji teorioliczbowych.



Krok 1. W tym kroku przyjrzymy się wyłącznie zachowaniu najmniejszej wspólnej wielokrotności kolejnych liczb naturalnych.

Jeśli n jest potęgą liczby pierwszej, czyli $n = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej p i $k > 0$, to żadna z liczb $1, 2, \ldots, n-1$ oprócz mniejszych potęg p nie dzieli p^k. Tym samym więc $\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, n-1) = p^{k-1} \cdot m$ dla pewnej liczby m, niepodzielnej przez p. Ponadto liczba $p^k \cdot m$ jest wielokrotnością liczb $1, 2, \ldots, n = p^k$ i każda wielokrotność tych liczb musi być wielokrotnością p^k oraz m. Stąd wynika więc równość

$$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) = p \cdot \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1).$$

Załóżmy teraz, że n nie jest potęgą liczby pierwszej. Wtedy $n = p^k \cdot m$ dla pewnych $k, m > 0$ i liczby pierwszej p (spełniających $p \nmid m$). Ponieważ $p^k < n$ i $m < n$, to $p^k | \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$ i $m | \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$. Ale liczby p^k i m są względnie pierwsze, więc ich iloczyn dzieli $\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$. Tym samym otrzymujemy równość

$$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) = \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1).$$

Wykorzystujemy następujący fakt: jeśli $a|c$, $b|c$ i liczby a i c są względnie pierwsze, to $ab|c$.

Krok 2. W tym kroku, z dokładnością do jednej zależności, wskażemy główny tok rozumowania dowodzący istnienia granicy. Wykorzystamy własności NWW, wykazane w kroku 1.

Zdefiniujmy dla $n > 1$ funkcję
$$\Lambda(n) = \ln \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) - \ln \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1).$$
Wtedy z kroku 1. wnioskujemy, że
$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{dla } n = p^k, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja Λ opisana klamrą nazywa się funkcją Von Mangoldta. Ma kilka ciekawych zastosowań w teorii liczb i jest związana ze słynną funkcją zeta Riemanna.

Dodając do siebie kolejne wartości funkcji Λ, zauważamy, że wiele składników się redukuje. Pozwala to stwierdzić, że
$$\ln \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) = \Lambda(2) + \cdots + \Lambda(n) =: \psi(n).$$

Funkcja $\psi(n)$ dana sumą funkcji Λ jest tak zwaną drugą funkcją Czebyszewa. Istnieje jawny wzór tej funkcji wiążący ze sobą nietrywialne zera funkcji zeta Riemanna.

Załóżmy teraz, że wiemy z jakiegoś powodu, że
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n} = 1. \tag{5}$$
Wtedy wykorzystując ciągłość funkcji wykładniczej oraz własności logarytmu naturalnego, otrzymujemy:
$$e = e^{\lim \frac{\psi(n)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\psi(n)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \sqrt[n]{\mathrm{NWW}(1,2,\ldots,n)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n)},$$
i tym samym dowodzimy niezwykłej równości.

Ciągłość funkcji pozwala „przejść" z symbolem granicy z argumentu na wartość.

Krok 3. Pozostaje nam do wykonania najtrudniejszy krok – uzasadnienie równości (5). W tym celu korzystamy z twierdzenia o liczbach pierwszych. Pozwala ono na szacowanie funkcji $\pi(x)$, zliczającej liczby pierwsze nieprzekraczające x. Zachodzi mianowicie przybliżenie
$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}, \quad \text{to znaczy} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1.$$
Zdefiniujmy na początek funkcję $\vartheta(x) = \sum_{p\leqslant x} \ln p$, gdzie podana suma (oraz wszystkie kolejne, w których sumujemy po liczbach p) rozważana jest po liczbach pierwszych nieprzekraczających x. Wtedy
$$\vartheta(x) \leqslant \sum_{p\leqslant x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p \leqslant \sum_{p\leqslant x} \ln x = \pi(x) \ln x.$$

Funkcja ϑ to tak zwana pierwsza funkcja Czebyszewa.

Równość $\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) = \sum_{p\leqslant x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p$ wynika z tego, że jest dokładnie $\lfloor \log_p x \rfloor = \lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \rfloor$ liczb postaci p^k w zakresie od 1 do x.

Środkowy wyraz to nic innego jak $\psi(x)$ (zob. wyjaśnienie na marginesie), więc – o ile odpowiednie granice istnieją – mamy
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}. \tag{6}$$
Niech teraz $n \geqslant 3$ i $y = x/(\ln x)^2$. Wtedy
$$\pi(x) = \pi(y) + \sum_{y<p\leqslant x} 1 \leqslant \pi(y) + \sum_{y<p\leqslant x} \frac{\ln p}{\ln y} \leqslant y + \frac{\vartheta(x)}{\ln y}$$
(w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z $\pi(y) \leqslant y$ oraz $\sum_{y<p\leqslant x} \ln p \leqslant \vartheta(x)$). Stąd z kolei
$$\frac{\pi(x)\ln x}{x} \leqslant \frac{y \ln x}{x} + \frac{\ln x}{\ln y}\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1 - 2\frac{\ln\ln x}{\ln x}}\frac{\vartheta(x)}{x}.$$
Ponieważ $\frac{1}{\ln x} \to 0$ oraz $\frac{\ln\ln x}{\ln x} \to 0$ (w obu przypadkach rozważamy $x \to \infty$), dostajemy
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}. \tag{7}$$
Łącząc (6) i (7), wnioskujemy, że granica ciągu $\left(\frac{\vartheta(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje i jest równa
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\vartheta(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln n}{n} = 1.$$
Epilog. Fascynujące w powyższym ciągu jest to, że zamiast rozważać w definicji wszystkie liczby, wystarczy rozważać liczby pierwsze. Tym samym otrzymujemy wzór
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{p\leqslant n} p} = e.$$
To nie koniec poszukiwań! Trzeci odcinek poświęcimy pewnemu problemowi z rachunku prawdopodobieństwa.

Rozwiązanie zadania M 1705.
Niech O będzie takim punktem, że $PO \parallel AB$, $PO = AB = CD$ oraz PO przecina odcinek AD. Wtedy czworokąty $ABPO$ oraz $CDOP$ są równoległobokami. Niech Q będzie punktem na prostej PO takim, że $OQ = OA$ i punkty P i Q leżą po przeciwnych stronach punktu O. Wtedy
$$\sphericalangle OQA = \sphericalangle OAQ = \frac{\sphericalangle AOP}{2} = \frac{\sphericalangle ABP}{2} = \sphericalangle ADP,$$
więc punkty A, P, D i Q leżą na jednym okręgu Ω. Wobec tego
$$\sphericalangle ODQ = \sphericalangle DOP - \sphericalangle DQO = \sphericalangle DCP - \sphericalangle DAP = \sphericalangle DAP = \sphericalangle DQO,$$
skąd $OD = OQ = OA$, więc O jest środkiem okręgu Ω. Zatem
$$AB = OP = OA = OD = PB = PC.$$