# Jak podzielić lody, czyli o nukleolusie

*Oskar SKIBSKI*

Adaś, Beatka i Czarek stoją przed lodówką z lodami w osiedlowym sklepie. Już jakiś czas temu zauważyli, że lody na patyku są małe i drogie, a na dodatek po zjedzeniu pozostaje w ustach smak patyka. Na lody w pudełku jednak Adasia i Beatki nie stać w ogóle, a Czarek mógłby kupić tylko 400 g. Postanowili więc się zrzucić. Okazało się, że Adaś i Beatka razem mogą kupić 500 g lodów, Adaś i Czarek też, a Beatkę z Czarkiem stać na 750 g. Jeżeli zrzucą się wszyscy, to uda im się kupić 1000 g. Tak się im najbardziej opłaca, biorą więc kilogram lodów i idą do kasy. Ich możliwości zakupowe wyglądają więc następująco:

Na marginesie warto zwrócić uwagę, że dzieci są mądre i patrzą na wagę lodów, a nie ich objętość, a nie jest to to samo.

| kto | *A* | *B* | *C* | *AB* | *AC* | *BC* | *ABC* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lody (g) | 0 | 0 | 400 | 500 | 500 | 750 | 1000 |

Pozostaje kwestia podziału. Mogliby podzielić się po równo i każdy dostałby 333 gramów (jeden gram zostałby na nożu), ale nie byłoby to zbytnio sprawiedliwe – Czarek może przecież sam kupić 400 gramów. Poza tym Beatka i Czarek dostaliby w ten sposób 666 g, a sami mogą kupić 750 g. Adaś nie powinien zatem dostać więcej niż 250 g – i tak powinien się cieszyć, bo bez przyjaciół nic by nie kupił. Czarek oczywiście powinien dostać co najmniej 400 g, ale nie więcej niż 500 g, aby Adaś z Beatką nie woleli kupić lodów bez niego. Wynika z tego, że Beatka dostanie co najmniej 250 g. Ojej, wszystko zrobiło się mocno pogmatwane. Użyjmy matematyki, aby to uporządkować.

Oznaczmy przez $a$, $b$ i $c$ ilości lodów, jakie dostaną odpowiednio Adaś, Beatka i Czarek. Zależy nam na tym, aby żadnej grupie nie opłacało się wyłamać, czyli szukamy takiej trójki liczb $(a, b, c)$, że $a + b + c = 1000$ oraz spełnione są następujące warunki:

$$c \geqslant 400, \quad a + b \geqslant 500, \quad a + c \geqslant 500, \quad b + c \geqslant 750.$$

Przekształcając je trochę (np. $a + b = 1000 - c$ daje ograniczenie górne na $c$), dostajemy następujący zbiór podziałów:

$$X = \{(a, b, c) : 0 \leqslant a \leqslant 250 \leqslant b \leqslant 500,\ 400 \leqslant c \leqslant 500,\ a + b + c = 1000\}.$$

Podziałów w tym zbiorze jest jednak wciąż bardzo dużo (matematycy powiedzieliby nawet, że nieskończenie wiele, a fizycy pewnie zaczęliby liczyć lodowe kwarki). Jak zatem dzieci powinny się podzielić?

Najwyższa pora sięgnąć do książek. Nasz problem jest szczególnym przypadkiem *problemu podziału*, czyli fundamentalnego zagadnienia teorii gier koalicyjnych. Ustalmy zbiór graczy $N$, zwykle oznaczanych kolejnymi liczbami naturalnymi $N = \{1, \ldots, n\}$. *Gra koalicyjna* to funkcja $v : 2^N \to \mathbb{R}$, która każdej grupie graczy $S \subseteq N$, czyli *koalicji*, przypisuje pewną wartość (zakładamy $v(\emptyset) = 0$). W naszej lodowej grze mamy zatem trzech graczy, a funkcja przypisuje, ile lodów są oni w stanie kupić. Pytanie, jak sprawiedliwie podzielić wartość $v(N)$ pomiędzy graczy, spędzało sen z powiek wielu naukowcom, w tym niejednemu laureatowi Nagrody Nobla.

W powyższej sytuacji wszyscy ci uczeni (a przynajmniej ci żyjący) zgodziliby się, że sprawiedliwy podział znajduje się w zbiorze $X$. Zbiór ten nazywany jest *rdzeniem*.

**Definicja.** *Rdzeń* (ang. *core*) gry $v$ to zbiór podziałów, w których każda koalicja otrzymuje wypłatę większą bądź równą jej wartości:

$$\mathit{Rdzeń}(v) = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ oraz } \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S) \text{ dla każdego } S \subseteq N\}.$$

Z rdzeniem są jednak problemy. Po pierwsze – często jest pusty. Załóżmy na chwilę, że ze sklepu wycofano lody o pojemnościach 400 i 500 gramów, ale wprowadzono promocję na 750-gramowe, i stać na nie każdą parę dzieci

**Rozwiązanie zadania F 1046.**
Zacznijmy od wyznaczenia wysokości $x$ położenia środka masy układu, gdy napój wypełnia puszkę do wysokości $h$ – masa napoju wynosi wtedy $mh/H$. Mamy:

$$x(h) = \frac{MH/2 + mh^2/(2H)}{M + mh/H}.$$

Nim rozpoczniemy poszukiwanie minimum funkcji $x(h)$ przeprowadźmy eksperyment myślowy i wyobraźmy sobie, że dla każdej badanej wysokości $h$ zamrażamy napój i kładziemy puszkę poziomo, na ostrzu noża umieszczonym dokładnie pod środkiem masy. Przyjmijmy, że zamrożony płyn jest po lewej stronie. Jeśli $x < h$, to po dodaniu napoju (zwiększeniu $h$) puszka przechyli się w prawo, bo prawa strona stanie się cięższa od lewej, a odjęcie napoju spowoduje przechył w lewo. Gdy $h < x$, to dodanie napoju spowoduje przechył w lewo, a odjęcie – w prawo. Co będzie, gdy $x = h$? W tej sytuacji zarówno dodanie, jak i odjęcie płynu spowoduje przechył w prawo. Oznacza to, że dla $x = h$, środek masy pionowo stojącej puszki jest najniżej. Najniższe położenie środka masy, $h_{min}$, spełnia więc równanie $x(h_{min}) = h_{min}$. Rozwiązaniem jest:

$$h_{min} = \frac{MH}{m}\left(\sqrt{1 + \frac{m}{M}} - 1\right).$$

Czytelnika lubiącego różniczkowanie zachęcamy do sprawdzenia, że podane rozwiązanie rzeczywiście odpowiada minimum funkcji $x(h)$. Przytoczone rozumowanie prowadzące do wniosku, że w swym najniższym położeniu środek masy leży na powierzchni napoju, stosuje się także do bardziej skomplikowanych kształtów niż walec – np. dla butelki – trudniej jednak wtedy wyznaczyć funkcję $x(h)$. (Problem i pomysł rozwiązania pochodzą z książki Helmuta Vogla „Probleme aus der Physik").

(czyli mamy grę $v(A) = v(B) = v(C) = 0$, $v(AB) = v(AC) = v(BC) = 750$ oraz $v(ABC) = 1000$). Dzieci wciąż nie są w stanie kupić więcej niż kilogram lodów, ale kilograma lodów nie da się podzielić tak, aby każda para dostała co najmniej 750 g.

Skoro $a + b \geqslant 750$, $a + c \geqslant 750$ oraz $b + c \geqslant 750$, to $2(a + b + c) \geqslant 2250$, co daje sprzeczność.

Po drugie – rdzeń, jak widzimy w naszym przykładzie, często zawiera więcej niż jeden wektor i spora część z nich nie wydaje się wcale sprawiedliwa. Na przykład podział $(100, 500, 400)$ znajduje się w zbiorze, ale Czarek na pewno nie uznałby go za fair. Dlatego też rdzeń nazywany jest czasem zbiorem podziałów stabilnych, a nie sprawiedliwych, a to trochę co innego – Czarek może się kłócić, ale sam więcej nie dostanie, a innych nie uda mu się przekonać do wyłamania się.

„Wartość Shapleya!” – mógłby zakrzyknąć Czytelnik, który miał styczność z grami koalicyjnymi (lub z autorem). O wartości Shapleya pisaliśmy już w $\Delta^{11}_{16}$ oraz $\Delta^{11}_{20}$. Rzeczywiście często znajduje się ona w rdzeniu. Zdarza się jednak, że rdzeń jest niepusty, a wartość Shapleya do niego nie należy. Nie jest to zatem rozwiązanie, którego szukamy.

Jak więc wybrać jeden wektor z rdzenia? I jak znaleźć podział, kiedy rdzeń jest pusty? Słynną odpowiedzią na te pytania jest *nukleolus*, nazywany też *jąderkiem*, o którym opowiemy w tym artykule.

Zastanówmy się nad następującymi trzema podziałami:

$$x = (300, 300, 400), \quad y = (200, 300, 500), \quad z = (150, 400, 450).$$

Który jest najbardziej sprawiedliwy?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, spójrzmy znowu na to, co o tych podziałach powiedziałyby wszystkie koalicje. Wcześniej patrzyliśmy tylko zero-jedynkowo, czy nie są stratne. Tym razem dla każdej koalicji policzymy jej zysk, czyli wypłatę pomniejszoną o jej wartość.

| zysk | $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $AC$ | $BC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 300 | 300 | 0 | 100 | 200 | $-50$ |
| $y$ | 200 | 300 | 100 | 0 | 200 | 50 |
| $z$ | 150 | 400 | 50 | 50 | 100 | 100 |

$$\text{zysk}(S, x) = \textstyle\sum_{i \in S} x_i - v(S)$$

Na przykład dla podziału $x$ i koalicji Adasia z Beatką zysk wynosi:

$$\text{zysk}(AB, x) = (300 + 300) - 500 = 100.$$

Pomijamy koalicję wszystkich graczy $ABC$, bo ma zawsze zerowy zysk.

**Rozwiązanie zadania F 1045.** Rozważmy najprostszy przypadek ruchu wzdłuż prostej. Kolejne klatki filmu rejestrują obraz co $\tau = 1/24$ s, co wystarcza do wywołania wrażenia ciągłości ruchu. Przyjmijmy, że na kolejnych klatkach filmu wyświetlanego „normalnie” poruszający się przedmiot znajdował się, odpowiednio, w położeniach $s_1, s_2, s_3$. Widz zarejestruje wówczas kolejno prędkości jako $v_1 = (s_2 - s_1)/\tau$ i $v_2 = (s_3 - s_2)/\tau$, a przyspieszenie jako $a = (v_2 - v_1)/\tau = (s_3 - 2s_2 + s_1)/\tau^2$. Po zmianie kierunku wyświetlania dla widza odwróci się kolejność rejestrowanych położeń na $s'_1 = s_3$, $s'_2 = s_2$, $s'_3 = s_1$. Wynika stąd, że widz zarejestruje prędkości $v'_1 = (s'_2 - s'_1)/\tau = (s_2 - s_3)/\tau$ i $v'_2 = (s'_3 - s'_2)/\tau = (s_1 - s_2)/\tau$. Jak widać prędkości zmienią znaki na przeciwne – zamieni się też ich kolejność. Wartość przyspieszenia pozostanie bez zmian. Oznacza to, że zmieni się zwrot prędkości względem zwrotu przyspieszenia, a więc np. ruch jednostajnie przyspieszony zmieni się w ruch jednostajnie opóźniony – tak jak oczekiwaliśmy.

Dla każdego podziału uszeregujmy zyski rosnąco. Taką listę będziemy nazywać *listą zysków* i oznaczać $L(x)$ dla podziału $x$. Dostajemy:

$$L(x) = (-50, 0, 100, 200, 300, 300),$$
$$L(y) = (0, 50, 100, 200, 200, 300),$$
$$L(z) = (50, 50, 100, 100, 150, 400).$$

Patrząc na te listy, od razu widzimy, że wzięliśmy jeden podział spoza rdzenia – dla pierwszego podziału mamy jeden ujemny zysk, co oznacza, że pewna koalicja dostała mniej lodów, niż mogłaby kupić sama (są to Beatka z Czarkiem). Ten podział możemy zatem odrzucić.

A który z dwóch pozostałych podziałów jest lepszy? To oczywiście kwestia dyskusyjna, ale widzimy, że w podziale $z$ każda koalicja coś zyskuje, a w podziale $y$ istnieją koalicje, których wypłaty są „na styk”. Fajnie by było, gdyby wszystkie koalicje czerpały „podobne” zyski, a przynajmniej żeby żadna nie była zbyt poszkodowana.

Ta właśnie idea przyświeca nukleolusowi, który stara się maksymalizować najmniejszy zysk, a wśród podziałów z takim samym najmniejszym zyskiem – drugi najmniejszy zysk i tak dalej. Bardziej precyzyjnie, nukleolus to taki podział, którego lista zysków jest maksymalna w porządku leksykograficznym (na marginesie tłumaczymy, co to znaczy).

Lista $a = (a_1, \ldots, a_k)$ jest leksykograficznie większa niż lista $b = (b_1, \ldots, b_k)$, co oznaczamy $a >_{lex} b$, jeżeli na pierwszej pozycji, na której listy się różnią, wartość na liście $a$ jest większa niż na liście $b$:
$a >_{lex} b \Leftrightarrow$ istnieje $i \in \{1, \ldots, k\}$ takie, że $a_i > b_i$ oraz $a_j = b_j$ dla każdego $j < i$.
Na przykład $(2, 3, 4, 5) >_{lex} (1, 5, 6, 7)$ oraz $(2, 3, 4, 5) >_{lex} (2, 3, 3, 6)$. Będziemy pisać $a \geqslant_{lex} b$, jeżeli $a >_{lex} b$ lub $a = b$.

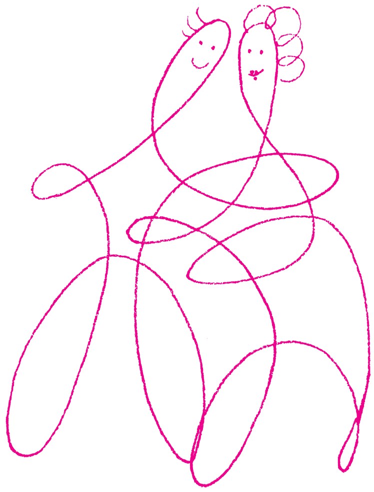
**Definicja.** *Nukleolus* (ang. *nucleolus*) gry $v$ to podział, którego lista zysków jest maksymalna leksykograficznie:

$$\textit{nukleolus}(v) = x \text{ t.że } L(x) \geqslant_{lex} L(y) \text{ dla każdego podziału } y.$$

Gwoli ścisłości – jeżeli wartość $v(N)$ jest mniejsza niż suma $\sum_{i\in N} v(\{i\})$, to zdefiniowany przez nas podział nazywa się *prenukleolusem*. Aby nie komplikować, nie wprowadzamy tego rozróżnienia w naszym artykule.

Łatwo zauważyć, że nukleolus zawsze należy do rdzenia, jeżeli ten jest niepusty: podział $x$ jest w rdzeniu, jeżeli pierwszy element listy zysków $L(x)$ jest nieujemny. Jeżeli rdzeń jest niepusty, to znaczy, że są podziały spełniające ten warunek, a zatem nukleolus, którego lista jest leksykograficznie maksymalna, też ma pierwszy element nieujemny.

Wróćmy do naszego przykładu. Widzimy, że lista $L(z)$ jest leksykograficznie większa niż $L(y)$ oraz $L(x)$. Ale czy nie istnieje podział, którego lista zysków jest jeszcze większa? Okazuje się, że nie. Spróbujmy to pokazać.



**Fakt.** Dla lodowej gry $v$ mamy $\textit{nukleolus}(v) = (150, 400, 450)$.

*Dowód.* Niech $(a, b, c)$ będzie dowolnym podziałem takim, że $a + b + c = 1000$. Nieposortowana lista zysków wygląda dla naszej gry tak:

$$(a, b, c - 400, a + b - 500, a + c - 500, b + c - 750).$$

Korzystając z równania $a + b + c = 1000$, dostajemy, że lista ta jest równa:

$$(a, b, c - 400, 500 - c, 500 - b, 250 - a).$$

Zacznijmy od środkowych elementów: $(c - 400)$ oraz $(500 - c)$. Widzimy, że któryś z tych elementów będzie mniejszy bądź równy 50. Nie da się więc stworzyć podziału, dla którego najmniejszy zysk będzie większy niż 50. Wiemy natomiast, że istnieje podział, w którym jest on równy 50 (takim podziałem jest przecież $z$). Dla nukleolusa najmniejszy zysk też zatem musi być równy 50. Aby tak było, musimy mieć $(c - 400) = (500 - c) = 50$, czyli $c = 450$. Lista zysków upraszcza się nam do:

$$(a, b, 50, 50, 500 - b, 250 - a).$$

Popatrzmy teraz na ostatnie dwa elementy. Ich suma jest równa

$$750 - (a + b) = 750 - 550 = 200.$$

Mniejszy z tych elementów musi być więc mniejszy bądź równy 100, a równość zachodzi tylko, jeśli $a = 150$ oraz $b = 400$. Dwa pierwsze elementy z listy są wówczas większe niż 100, więc rzeczywiście na maksymalizacji mniejszego z dwóch ostatnich elementów powinniśmy się skupić. Wychodzi nam zatem, że podział $(150, 400, 450)$ rzeczywiście daje maksymalną leksykograficznie listę. $\square$

Wspomnieliśmy już kiedyś, że nukleolus odegrał kluczową rolę w rozwiązaniu *Problemu bankructwa z Talmudu* ($\Delta^{10}_{21}$) O związku obu tematów napiszemy następnym razem, a Niecierpliwych Czytelników zachęcamy, aby znając oba pojęcia, sami spróbowali odkryć ten związek.

Jak widzieliśmy na naszym prostym przykładzie, wyznaczenie nukleolusa nie jest takie proste. Z samej definicji nie jest także oczywiste, że nukleolus jest określony jednoznacznie ani że w ogóle istnieje! Oba te stwierdzenia są jednak prawdziwe. Nasz artykuł zakończymy, pokazując jednoznaczność – o znalezienie jednego podziału lodów przecież nam chodziło od samego początku.

**Twierdzenie.** *Nie istnieją dwa różne podziały $x, y$ takie, że $L(x) = L(y)$ jest maksymalną listą zysków.*

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie. Skoro podziały są różne, ale listy zysków takie same, to różne musi być dopasowanie koalicji do zysków. Na marginesie prezentujemy przykład takiej sytuacji. Popatrzmy teraz na podział $z = (x + y)/2$. Wykażemy, że $L(z) >_{lex} L(x)$, co pokazuje, że $x$ i $y$ nie mają wcale maksymalnej listy zysków.

Popatrzmy na dwa podziały dla naszej oryginalnej gry: $x = (75, 425, 500)$, $y = (175, 425, 400)$. Dostajemy:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $AC$ | $BC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 75 | 425 | 100 | 0 | 75 | 175 |
| $y$ | 175 | 425 | 0 | 100 | 75 | 75 |

Mamy zatem:

$$L(x) = (0, 75, 75, 100, 175, 425) = L(y).$$

Rozpatrzmy teraz $z = (x + y)/2$, czyli $z = (125, 425, 450)$. Dostajemy:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $AC$ | $BC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 125 | 425 | 50 | 50 | 75 | 125 |

Czyli $L(z) = (50, 50, 75, 125, 125, 425)$ i rzeczywiście $L(z) >_{lex} L(x) = L(y)$.

Dla dowolnej koalicji $S$ mamy: $\text{zysk}(S, z) = (\text{zysk}(S, x) + \text{zysk}(S, y))/2$ $(*)$. Niech $c$ będzie najmniejszym zyskiem, dla którego dopasowanie koalicji się różni (dla przykładu z marginesu mamy $c = 0$). Najpierw zauważmy, że listy $L(x)$ oraz $L(z)$ mają takie same wartości mniejsze niż $c$. Jeżeli $\text{zysk}(S, x) < c$, to z definicji $c$ mamy $\text{zysk}(S, x) = \text{zysk}(S, y)$, więc także $\text{zysk}(S, z) = \text{zysk}(S, x) < c$. Z kolei jeśli $\text{zysk}(S, x) \geqslant c$, to także $\text{zysk}(S, y) \geqslant c$ i z $(*)$ też $\text{zysk}(S, x) \geqslant c$.

Przeanalizujmy teraz, jakie koalicje mają zysk $c$ według podziału $z$. Jeżeli $\text{zysk}(S, x) = c$ oraz $\text{zysk}(S, y) = c$, to oczywiście $\text{zysk}(S, z) = c$. Jednak jeżeli $\text{zysk}(S, x) = c$, ale $\text{zysk}(S, y) > c$ (lub odwrotnie: $\text{zysk}(S, y) = c$, ale $\text{zysk}(S, x) > c$), to z $(*)$ mamy $\text{zysk}(S, z) > c$. A skoro tak, to $c$ pojawia się na liście zysków $L(z)$ mniej razy niż w $L(x)$ i $L(y)$. Z tego wynika, że $z$ ma leksykograficznie większą listę zysków, a to daje nam sprzeczność. $\square$