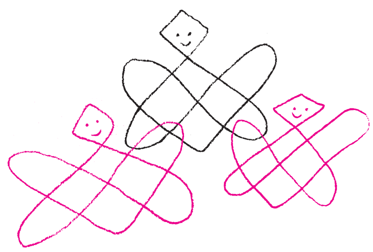
# Fibonacci prawie wszędzie

*Mirosław LACHOWICZ**

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski.

Leonardo Pisano (ok. 1170 – ok. 1242) znany jest powszechnie pod pseudonimem Fibonacci. Pisano także nie jest jego nazwiskiem – oznacza jedynie, że urodził się w Pizie. Fibonacci to syn Bonacciego. Był synem zapewne bardzo spokojnego człowieka, skoro jego ojciec miał pseudonim Bonacci. Fibonacci był prawdopodobnie jednym z najwybitniejszych matematyków w historii. Jako główną jego zasługę uznałbym przeniesienie na grunt bardzo wówczas ospałej matematycznie (i nie tylko) Europy – idei matematyków hinduskich i arabskich. To on połączył je z ideami matematyków greckich, a w szczególności z ideami geometrii euklidesowej. Wprowadził i pokazał zaletę systemu liczb arabskich (które nazywał, i słusznie, hinduskimi) z układem pozycyjnym. Upowszechnił liczbę 0, której nie znał system rzymski. Trudno sobie wyobrazić rozsądną matematykę bez 0. Trudno sobie wyobrazić opis świata bez 0. Nazwa 0 – zero – ma też ciekawą historię. Po łacinie było nazywane *zephirus*, co pochodziło od arabskiego *sifr*, to z kolei pochodziło z sanskrytu *śūnya* oznaczającego pustkę. *Zephirus* poprzez dialekt wenecki (veneziano) stało się *zevero*, a stąd już tylko krok do naszego *zera*. Naszego i w wielu innych językach. Czy można powiedzieć, że jeżeli coś ludzkość łączy, to właśnie 0?



Rzymianie do liczenia używali abakusa (liczydła). W swoim dziele *Liber abbaci* nasz Leonardo, wbrew tytułowi, pokazał, że to nie abakus, lecz system arabski (hinduski) ułatwia i wręcz umożliwia rachunki. Warto zauważyć, że Leonardowi udało się to, co nie powiodło się 200 lat wcześniej papieżowi Sylwestrowi II. Choć łatwo nie było – prawie 80 lat po dziele Leonarda miasto Florencja zabroniło bankierom używania cyfr (hindusko-) arabskich (bo mogliby oszukiwać, szczególnie ci z Pizy).

Paweł Domański, *Uogólnione ciągi Fibonacciego*, $\Delta^{01}_{79}$.

Jarosław Górnicki, *Fibonacci spotyka Banacha*, $\Delta^{06}_{20}$.

Ilja Erenburg, *Burzliwe życie Lejzorka Rojtszwańca*, Warszawa, Czytelnik, 1957.

Leonardo najbardziej znany jest z ciągu Fibonacciego, omawianego już w *Delcie* (artykuły P. Domańskiego i J. Górnickiego). Najczęściej ciąg ten wiąże się z populacją królików. Może być traktowany jako prosty model populacji ze strukturą wieku. Oczywiście model nie jest zbyt realistyczny („para rodzi parę”) i dość szybko zakrólikowalibyśmy cały świat, niczym Lejzorek Rojtszwaniec w książce I. Erenburga.

Rozważamy pary różnopłciowe królików młodych („króliczków”), które się nie mogą rozmnażać, i dojrzałych („królików”), które mogą i to czynią. Zakładamy, że ani króliczki, ani króliki nie umierają. Czas liczymy sezonami. Nowo urodzone króliczki potrzebują sezonu, by dojrzeć. Każda para (dojrzałych) królików w każdym sezonie wydaje na świat parę króliczków. W chwili $n = 1$ kupujemy parę króliczków. Mamy więc jedną parę dla $n = 1$. Ta para dojrzewa – mamy więc dla $n = 2$ jedną parę królików. Dla $n = 3$ para królików wydaje na świat jedną parę króliczków, mamy więc jedną parę króliczków i jedną parę królików. Jeżeli $F_n$ jest sumą par króliczków i królików w sezonie $n$, to

(1) $$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

Jest to słynny ciąg Fibonacciego 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., o którym można poczytać w w.w. pracach. Okazuje się, że liczby z ciągu Fibonacciego często spotyka się w przyrodzie. Oto na przykład liczby płatków korony kwiatów:

- 1 płatek: Cantedeskia (Zantedeschia) zwana kalią,
- 2 płatki: wilczomlecz sosnka (Euphorbia cyparissias L.),
- 3 płatki: strzałka wodna (Sagittaria sagittifolia L.), śnieżyczka przebiśnieg (Galanthus nivalis L.),
- 5 płatków: róża dzika (Rosa canina L.), niezapominajka, niezabudka (Myosotis L.), dziurawiec (Hypericum L.), bodziszek cuchnący (Geranium robertianum L.),
- 8 płatków: kosmos (Cosmos Cav.).

Zbyt entuzjastyczni interpretatorzy skłonni są uznać, że wszystko w przyrodzie jest zbudowane według ciągu Fibonacciego. Niestety przykłady:

- 4 płatki: wiesiołek (Oenothera L.), mak polny (Papaver rhoeas L.), godecja wielkokwiatowa (Godetia grandiflora),

**Rozwiązanie zadania M 1707.**
Załóżmy, że $m = 4n^2 + 4r + 1$ nie jest równe 1 ani nie jest liczbą pierwszą. Wówczas posiada nieparzysty dzielnik pierwszy $p = 2k + 1$ taki, że $p \leqslant \sqrt{m}$. Mamy zatem dwa przypadki: 1) $p < \sqrt{m}$. Wtedy

$$n^2 + r - k(k+1) = \frac{m - p^2}{4}$$

jest liczbą całkowitą dodatnią podzielną przez $p$, skąd z warunków zadania jest równa $p$. Zatem

$$n^2 + r - k(k+1) = p = 2k + 1,$$

czyli

$$n^2 + r - (k+1)(k+2) = 2k + 1 - 2(k+1) = -1$$

– wbrew założeniu zadania.

2) $p = \sqrt{m}$. Wtedy

$$4n^2 + 4r + 1 = p^2 = (2k+1)^2,$$

skąd

$$n^2 + r - (k-1)k = 2k$$

– sprzeczność z założeniem, o ile $k \neq 1$. Zatem $k = 1$ i

$$4n^2 + 4r + 1 = 3^2 = 9.$$

- 6 płatków: lilia (Lilium L.), zawilec gajowy (Anemone nemorosa L.), tulipan (Tulipa L.), niektóre rodzaje powojnika (Clematis L.),
- 7 płatków: siódmaczek leśny (Trientalis europaea L.),

pokazują, że należy być ostrożnym w formułowaniu tak daleko idących zdań. Z drugiej strony te kontrprzykłady nie powinny nam psuć przyjemności kontemplowania sytuacji w przyrodzie, gdy istnieje zgodność z ciągiem Fibonacciego.

Rozwiązania trzeciego równania w (1) można poszukiwać w postaci $F_n = \lambda^n$. Po wstawieniu otrzymujemy tzw. wielomian charakterystyczny przyrównany do 0:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Pierwiastkami (*wartościami własnymi*) są $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a zatem rozwiązanie ma postać

$$(2) \quad F_n = c_- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_+ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie stałe $c_-$ i $c_+$ należy wyznaczyć tak, aby były spełnione dwa pierwsze równania (1). Otrzymujemy zatem $c_+ = -c_- = \frac{1}{\sqrt{5}}$, które po wstawieniu do (2) dają tzw. wzór Bineta. Rozwiązanie można zapisać w następującej postaci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right), \ n = 1, 2, \ldots$$

Widać zatem, że dla dużych $n$ ciąg $F_n$ będzie się zachowywał jak ciąg geometryczny $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Jest to wniosek z ogólnego faktu wynikającego z twierdzenia Frobeniusa–Perrona: o zachowaniu decyduje dominująca wartość własna. Iloraz

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \, \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

zbiega do $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, gdy $n \to \infty$, gdzie $\Phi$ jest *liczbą złotego podziału* – zauważył ten fakt Johannes Kepler (1571–1630).

Jeżeli chcemy, za Euklidesem, aby odcinek długości $x+y$ został rozłożony na dwa odcinki o długości $x$ i $y$, tak aby stosunek dłuższej części $y$ do krótszej $x$ był taki sam jak stosunek długości całego odcinka $x+y$ do części dłuższej $y$, to otrzymujemy

$$\frac{y}{x} = \frac{x+y}{y}, \quad \Phi = \frac{y}{x}, \quad \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \quad \Phi \approx 1{,}61803.$$

Złoty podział znali już starożytni Babilończycy (IX w. p.n.e.), Egipcjanie i Grecy. Wykorzystywali go w architekturze i zdobieniach. Litera $\Phi$ pojawiła się na cześć rzeźbiarza Fidiasza (ok. 490 p.n.e. – ok. 430 p.n.e.). Ciekawe jest pytanie, czy złoty podział rzeczywiście ujmuje istotę naturalnego piękna, czy też Grecy przekazali nam wzorzec, który ukształtował nasze poczucie piękna.

Sporo informacji o złotym podziale oraz zgodności ciągu Fibonacciego ze światem można znaleźć w artykule Urszuli Foryś.

U. Foryś, *Nie tylko złoty podział: czy Fibonacci to przewidział?*, Rozdział V, Monografia Centrum Zastosowań Matematyki, 2014, Metody matematyczne w zastosowaniach, tom 2. Pod redakcją A. Bartłomiejczyk.

W Indiach ciąg Fibonacciego pojawił się w sanskryckiej prozodii (system wersyfikacji). W ustnej tradycji sanskryckiej kładziono duży nacisk na to, jak długie (L) sylaby (2 jednostki trwania) mieszają się z krótkimi (S) sylabami (1 jednostka). Liczenie różnych wzorców L i S w ramach określonej stałej długości prowadziło do ciągu Fibonacciego: liczba wzorców, w których jest $n$ krótkich sylab, to liczba Fibonacciego $F_{n+1}$. Idee te można znaleźć w pracach Pingali (200 p.n.e.), Virahanki (700 n.e.), Gopali (ok. 1135) i Hemachandry (ok. 1150).

C. K. Ghosh, A. I. Khan, *Exploring the Fibonacci Sequence*, Dream 2047, April 2015, Vol. 17 No. 7.

Acharya Hemachandra (ok. 1088 – ok. 1173) był hinduskim poetą, matematykiem, filozofem i językoznawcą. Naśladując Gopalę, opisał ciąg Fibonacciego około 1150 roku, czyli ponad 50 lat przed Fibonaccim. Rozważał liczbę kadencji o długości $n$, pokazał, że można je utworzyć, dodając krótką sylabę do kadencji o długości $n-1$ lub długą do kadencji o długości $n-2$.

Gopala i Hemachandra rozpatrywali następujący uogólniony ciąg:

$$(3) \qquad G_1 = a, \ G_2 = b, \ G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

Po wstawieniu $a = 1$ i $b = 1$ otrzymujemy ciąg Fibonacciego (por. (1)). Dla $a = 1$ i $b = 3$ otrzymujemy ciąg Lucasa (François Édouard Anatole Lucas, 1842–1891). Możliwe są też inne uogólnienia, patrz w.w. artykuł P. Domańskiego. Czasami uogólnione ciągi nazywa się „Gibonacci” (od ogólny – *general*).

Parmanand Singh, *The so–called Fibonacci numbers in ancient and medieval India*, Historia Mathematica 12 (1985), 229-244.

L. Childers, K. Gopalakrishnan, *Gopala–Hemachandra codes revisited*, arXiv:2004.00821v1.

Jeremiah T. Southwick, *The Lucas Numbers and Other Gibonacci Sequences Mod m*, arXiv:1402.0598v1.

Edouard Zeckendorf (1901–1983), belgijski lekarz i matematyk, udowodnił w roku 1972 twierdzenie mówiące o tym, że każda liczba naturalna może być jednoznacznie przedstawiona (tzw. reprezentacja Zeckendorfa) jako suma jednej lub więcej liczb z ciągu Fibonacciego w taki sposób, że suma ta nie zawiera dwóch kolejnych liczb z ciągu. Dokładniej:

**Twierdzenie Zeckendorfa**: Jeżeli $N$ jest liczbą naturalną, to $N$ może być w sposób jednoznaczny przedstawione jako:

$$N = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F_{j+1}, \tag{4}$$

gdzie $\alpha_j$ równa się 0 lub 1, dla $j = 1, \ldots, m$, $\alpha_m = 1$, $F_j$ są liczbami z ciągu Fibonacciego oraz jeżeli $\alpha_i = 1$, to $\alpha_{i+1} = 0$ dla $i = 1, \ldots, m-1$.

W sumie (4) występuje $F_{j+1}$, aby uniknąć dwóch 1. Reprezentacją Zeckendorfa liczby $N$ nazywamy odpowiadający jej ciąg skończony $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\ldots$, $\alpha_m$, np. dla liczby 1 jest (1), dla liczby 4 jest (1, 0, 1), dla liczby 6 jest (1, 0, 0, 1), dla liczby 12 jest (1, 0, 1, 0, 1). Reprezentacja Zeckendorfa określa kod Fibonacciego, który zamienia, w sposób jednoznaczny, każdą liczbę naturalną na skończony ciąg binarny. Kod Fibonacciego używany jest do kompresji danych, czyli wyrażenia tej samej informacji za pomocą mniejszej liczby bitów. W reprezentacji Zeckendorfa nigdy dwie jedynki nie mogą wystąpić obok siebie, stąd w kodzie Fibonacciego stosuje się dodatkową jedynkę na końcu ciągu, aby zaznaczyć w ten sposób koniec ciągu, czyli np. dla 4 będzie to 1011, a dla 6 – 10011.

Ciekawostką jest, że ten sam wynik co Zeckendorf otrzymał Cornelis Lekkerkerker (1922–1999) w roku 1952, czyli 20 lat przed Zeckendorfem, i opisał w pracy w języku holenderskim (Zeckendorf napisał swoją pracę po francusku).

Okazuje się, że dla uogólnionego ciągu $G_n$ nie dla wszystkich $a$ i $b$ mamy odpowiednik reprezentacji Zeckendorfa, np. dla $a = -5$ i $b = 6$ nie ma – por. pracę L. Childersa i K. Gopalakrishnana.

Ciąg Fibonacciego i jego uogólnienia są dalej przedmiotem interesujących badań matematyków, a nawet jest wydawane specjalne pismo naukowe poświęcone tym badaniom – *The Fibonacci Quarterly* – związane z *The Fibonacci Association*.

# Liczba Eulera przy obliczaniu NWW

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W poprzedniej części odkryliśmy liczbę Eulera w trójkącie Pascala. Tym razem spróbujemy sięgnąć do jednej z najciekawszych dziedzin matematyki – teorii liczb.

## Najmniejsza wspólna wielokrotność

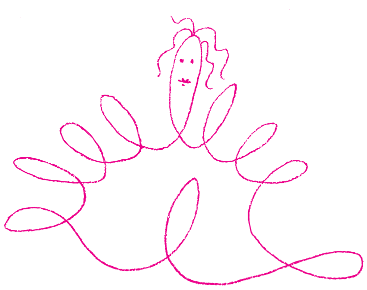
Niech $a_n = \sqrt[n]{\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, n)}$. Obliczając początkowe wyrazy tego ciągu, zauważmy, że są one zawsze „małe". Na przykład

$$a_{15} = 2{,}34665, \qquad a_{30} \approx 2{,}58368, \qquad a_{60} \approx 2{,}60879.$$

$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 15) = 360\,360$,
$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 30) = 2\,329\,089\,562\,800$,
$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 60) =$
$= 9\,690\,712\,164\,777\,231\,700\,912\,800$.

Zaskakujące jest jednak to, że wyrazy ciągu $a_n$ tworzą bardzo przyjazny ciąg, jest on bowiem zbieżny do liczby Eulera!

W dalszej części zobaczymy jedno z możliwych uzasadnień tego faktu. Nie jest ono całkowicie elementarne, gdyż wykorzystuje twierdzenie o liczbach pierwszych (o nim również za chwilę napiszemy). Rozumowanie podzielimy na trzy etapy. Każdy z nich zawiera w sobie ciekawe rozważania na temat liczb oraz funkcji teorioliczbowych.



Krok 1. W tym kroku przyjrzymy się wyłącznie zachowaniu najmniejszej wspólnej wielokrotności kolejnych liczb naturalnych.

Jeśli $n$ jest potęgą liczby pierwszej, czyli $n = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej $p$ i $k > 0$, to żadna z liczb $1, 2, \ldots, n-1$ oprócz mniejszych potęg $p$ nie dzieli $p^k$. Tym samym więc $\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, n-1) = p^{k-1} \cdot m$ dla pewnej liczby $m$, niepodzielnej przez $p$. Ponadto liczba $p^k \cdot m$ jest wielokrotnością liczb $1, 2, \ldots, n = p^k$ i każda wielokrotność tych liczb musi być wielokrotnością $p^k$ oraz $m$. Stąd wynika więc równość

$$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) = p \cdot \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1).$$

Załóżmy teraz, że $n$ nie jest potęgą liczby pierwszej. Wtedy $n = p^k \cdot m$ dla pewnych $k, m > 0$ i liczby pierwszej $p$ (spełniających $p \nmid m$). Ponieważ $p^k < n$ i $m < n$, to $p^k | \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$ i $m | \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$. Ale liczby $p^k$ i $m$ są względnie pierwsze, więc ich iloczyn dzieli $\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$. Tym samym otrzymujemy równość

$$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) = \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1).$$

Wykorzystujemy następujący fakt: jeśli $a|c$, $b|c$ i liczby $a$ i $c$ są względnie pierwsze, to $ab|c$.

Krok 2. W tym kroku, z dokładnością do jednej zależności, wskażemy główny tok rozumowania dowodzący istnienia granicy. Wykorzystamy własności NWW, wykazane w kroku 1.