



Natomiast dla liczb n postaci $n = 4m + 2$ liczba $k \cdot 2^n + 1$ rozkłada się na czynniki. Skorzystamy mianowicie z tożsamości Sophie Germain:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = \\ &= (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2). \end{aligned}$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} k \cdot 2^n + 1 &= 1 + t^4 \cdot 2^{4m+2} = 1 + 4t^4 \cdot (2^m)^4 = 1^4 + 4(t \cdot 2^m)^4 = \\ &= (1 + 2t \cdot 2^m + 2t^2 \cdot 2^{2m})(1 - 2t \cdot 2^m + 2t^2 \cdot 2^{2m}) = \\ &= (1 + t \cdot 2^{m+1} + t^2 \cdot 2^{2m+1})(1 - t \cdot 2^{m+1} + t^2 \cdot 2^{2m+1}) \end{aligned}$$

oraz obie liczby występujące w rozkładzie po prawej stronie są większe od 1. To kończy szkic dowodu.

Zauważmy także, że dla każdej liczby n mamy kongruencję

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 1 \pmod{5},$$

z której wynika, że zbiór $\{3, 5, 17, 257, 641, 65537, 6700417\}$ nie pokrywa zbioru liczb postaci $k \cdot 2^n + 1$. Nie mogliśmy zatem powołać się na rozumowanie przedstawione wcześniej w dowodzie twierdzenia Sierpińskiego.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1702. Na kartce w kratkę zaznaczono $4n$ pól. Udowodnij, że istnieje n zaznaczonych pól, które są parami rozłączne (tzn. nie mają punktów wspólnych).
Rozwiązanie na str. 15

M 1703. Punkt T leży wewnątrz trójkąta ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Ponadto spełniona jest równość

$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle CTA = 120^\circ.$$

Punkty X i Y są środkami odcinków AB i AC , odpowiednio. Udowodnij, że punkty A, Y, T i X leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie na str. 4

M 1704. Dane są dwie różne liczby całkowite dodatnie k oraz m . Udowodnij, że

$$\left(k - \frac{1}{k}\right) \left(m - \frac{1}{m}\right) \leq km - 2.$$

Rozwiązanie na str. 13

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1043. Człowiek poddany działaniu przyspieszenia nieprzekraczającego dwukrotnej wartości przyspieszenia ziemskiego nie doznaje przykrych wrażeń. Prędkość startowa dużych samolotów pasażerskich (np. Jumbo Jeta) wynosi $v \approx 250$ km/godz. Jaki jest minimalny czas „rozpędzania” samolotu przed startem, podczas którego pasażerowie nie odczuwają dyskomfortu? Jaka jest minimalna długość poziomego pasa startowego potrzebna do osiągnięcia prędkości startowej? Przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s².

Rozwiązanie na str. 6

F 1044. Profesor Izydor Rabi był bardzo dumny z precyzji, z jaką odmierzał czas jego mechaniczny zegarek. Podczas pobytu w laboratorium badającym promieniowanie kosmiczne, położonym na szczycie wysokiej góry, zaobserwował jednak, że jego zegarek przestał wskazywać poprawny czas. Czy na szczycie góry zegarek spieszył się, czy późnił?

Rozwiązanie na str. 7